

連載 (講義)

電子光学入門

— 電子分光装置の理解のために — (第8回)

嘉藤 誠

日本電子(株) 〒196-8558 東京都昭島市武蔵野 3-1-2

kato@jeol.co.jp

(2006年10月2日受理)

光学系におけるビームのふるまいは、輝度不変則によって強い制約をうけます。この法則はビームの集中度に理論的な限界を課し、光学装置の性能を大きく左右するものです。輝度不変則は熱力学と深く関係し、またその起源は光と粒子の波動性までさかのぼることができます。

Introduction to Electron Optics for the Study of Energy Analyzing Systems (8)

M. Kato

JEOL Ltd., 3-1-2 Musashino, Akishima, Tokyo 196-8558.

kato@jeol.co.jp

(Received: October 2, 2006)

The behaviour of beams in an optical system is greatly influenced by the conservation law of brightness. This law decides the theoretical maximum concentration of a beam, and then has a serious effect on the performance of optical instruments. The brightness law is closely related to thermodynamics, and traces back to the wave nature of rays and particles.

8 面光源と輝度不変則

8.1 はじめに

前回までにおいて、光学レンズ中の光線、および電磁場中の電子軌道のふるまいに関して議論してきました。今回のテーマは、そのような内容とは少しおもしろい異なったものです。すなわち、一本一本の光線や電子軌道を個別に扱うのではなく、その集団としての「ビーム」を考察の対象とします。

ビームの大まかな特徴は、空間的な幅と角度幅という二つのパラメタによって捉えられます。これらが光学系におけるビームの進行とともにどのように変化するか、あるいは、どのような変化は不可能であるといった制約が存在するかどうかを知る必要があります。

具体的に、太陽光を虫メガネで集める場合を考えてみましょう。一般に、光が照射された場所の温度は、その光のエネルギー密度で決まります。そこで、太陽光の集中度を局所的に高めれば、いくらでも高い温度をつくれることとなります。(これに関しては本章で説明します。) レンズの焦点に置いた紙の上で、光の集中度になにか限界があるでしょうか?

市販の安い虫メガネはともかく、この目的のために特別なレンズを設計すれば、光を際限なくせまい領域に集められるように思えます。とすれば、太陽表面よりも高い温度を地球上でつくるのが可能になります。しかしこれは、熱力学の法則(第二法則)に反します。

現実はどうかといえば、レンズをうまくもちいれれば太陽表面と同じ温度までは達成できますが、それ以上はどうかんばっても不可能です。これは、熱力学から期待されるものと完全に整合しています。

このような光の集中度の上限は、回折現象による

ものではありません。確かに回折によってビームはボケますが、この現象は光の波長に依存します。理論上は、光の波長を0に近づけていけば回折効果はいくらでも小さくできます。したがって、集中度の明確な限界というものが、回折によって説明されることはありません。

とすれば、光学系の限界を説明するものは、幾何光学でなければなりません。幾何光学は個々の光線の行き先を規定するものですが、それによって、光線の集団としてのビームのふるまいにも何らかの制約が生じてしかるべきです。そのような制約を具体的に表現するものが、今回のテーマである輝度不変則です。

光学レンズの設計の分野では、輝度不変則と同内容のものがアッペの正弦条件としていい表されます。これは、アッペが光学顕微鏡の対物レンズの設計中に、コマ収差を取り除く条件として見出したものです。Fナンバーが0.5以下のレンズはつくれない、という事実はカメラや天体望遠鏡のお好きな方ならご存知のはずですが、これは正弦条件からの帰結です。

実はアッペ以前に、本質的に正弦条件と同内容のものを、クラウジウスが熱力学から導いています。しかし、正弦条件とクラウジウスの理論が等価であることが理解されるまでには、長い年数がかかっています。

電子光学系においても、輝度不変則に由来する制約が存在します。たとえば、電子ビームを細く絞ろうとすれば、ビームに含まれる電流量が犠牲になります。あるいは、電子分光系において、エネルギー分解能と感度が両立しないという事実もその例です。

電子光学装置の性能にかかわる多くの局面において、輝度不変則が支配的な役割をはたしています。しかしながら、装置がそのような法則に由来する制約を受けているということ自体、気づかれないことが多いはずで

厄介なことに、輝度不変則は、光線の作図法としての幾何光学からはなかなか理解できません。この法則が「どこからやってくるのか」が見えてこないのです。熱力学と矛盾しないために輝度不変則が存在するのだ、という説明も可能ですが、それでわかった気にはなれないでしょう。もっと根源的な、たとえば光の本来の性質から理解できなければなりません。

今回は、最初に輝度不変則の内容を簡単に紹介し、それから法則の導出および応用を述べます。なお、電子光学系における輝度不変則の役割は次回述べることにし、今回は光に関する議論を中心とします。

8.2 輝度不変則と光学系

輝度不変則は、光学系というものの本質にかかわる、重要でかつ難解なテーマです。そこで本節において、輝度不変則に関するエッセンスを先に示しておくことにします。本節の内容に関する詳しい解説と証明は、次節以降でなされます。

輝度不変則を説明するために、「輝度不変則に反する光学系」の例を示すのがわかりやすいでしょう。Fig.1はそのような光学系です。

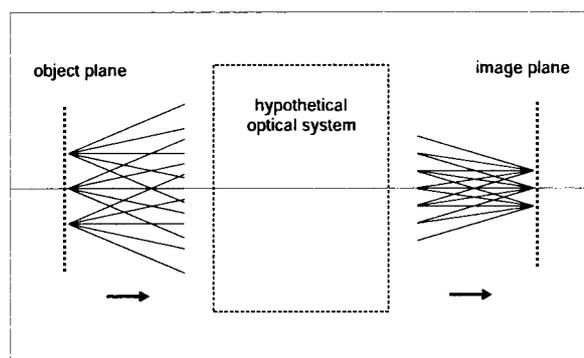


Fig. 1: Hypothetical optical system that violates the conservation law of brightness.

図において、物面におかれた物体は光学系によって結像されていますが、像のほうがもとの物体よりも縮小されています。一方、光線の開き角に注目すると、物面での開き角より像面における開き角のほうが小さくなっています。すなわちこの光学系は、空間と角度のひろがりをもとに縮小するはたらきをもっています。

このような光学系は実現不可能である、ということが輝度不変則からの結論です。輝度の具体的な定義はのちほど述べますが、大雑把に言えば、ビーム内部のエネルギーの集中度です。ビームの空間的な幅と角度幅が縮小するほど、輝度は増大します。そして輝度不変則から、ビームの空間幅と角度幅の積が一定に保たれることが導かれます。

この法則によって、どんな光学系をもちいても、像を縮小すればするほど角度幅が増大してしまいます。逆に、像を拡大すればするほど、角度のひろがり小さくなります。

輝度不変則の適用範囲について述べておきます。まずこの法則は、輝度を比較する二つの面上で屈折率が等しいときだけに成立します。もし屈折率が異なれば、輝度は増加も減少もありえます。しかし本章で

は、光学系の途中で屈折率が変化しても、最終的にはもとの屈折率に戻る場合を主として考えます。(電子光学系でいえば、同じ電位の場所に戻る場合です。)

また、上の説明では輝度不変則を物面と像面における関係として述べましたが、輝度は光軸に直交する任意の平面上で定義され、任意に選んだ二面間で輝度が不変に保たれます。したがって、系が結像作用をもつかどうかとは無関係です。途中の空間にどんな屈折率分布がつけられていても、あるいは何も無いドリフト空間であっても、最終的にもとと同じ屈折率の場所に至れば、輝度も同じ値になります。

次に、近軸領域で成立する光学、すなわちガウス光学との関係に触れておきます。ガウス光学によって、像を縮小すればするほど角度幅が増大するという傾向が正しく説明されます。すなわち、レンズ公式 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ にもとづいて光線図を描けば、像倍率と角度倍率が反比例することが示されます。これは第1章で示したとおりです。

しかしながら、ガウス光学は近軸領域からはなれるにしたがって誤差が顕著になり、このために輝度不変則を定量的に正確に導くことができません。ガウス光学のもとでは、光の集中度はいくらでも大きくできてしまうのです。輝度の不変性を定性的には示せても、極限的な状況を説明するには無力ということです。

輝度不変則の理解が難しいのは、一点から出た光線だけではなく、複数の点からの光線が関与しているからです。つまり、点光源ではなく面光源にかかわる法則です。

一本の光線だけなら、屈折率分布をうまく選べば、ほとんどどんな軌跡でもとらせることができます。しかし、その屈折率分布を別の方向からやってきた光線も通るので、すべての光線を独立に制御することは出来ません。そのようにして生じてくる制約が、輝度不変則であるわけです。

なぜ Fig.1 のような状況が不可能なのか？これが不思議であると感じることが、輝度不変則の理解、さらには光学系というものの本質にいたる第一歩です。

では次節から、具体的な議論を始めることにします。

8.3 光学系におけるビームの伝播

8.3.1 ドリフト空間

光としての電磁波の飛び交うさまは、光線の集りとして記述され、ほぼ一定の方向に向かう光線の集合が存在する場合、それを光のビームとよびます。

何も無い空間、すなわちドリフト空間におけるビームのふるまいを考えましょう。ドリフト空間においては、光線はただの直線です。しかし、直線が束になってビームを構成したときに、進行とともに状態を変える様子はそれほど単純ではありません。たとえば Fig.2 のような状況です。

このようなビームの伝播に関して、なにか法則とか、あるいは保存量のようなものを見出すことができるでしょうか？これを以下で考えてみます。(第4章の内容と少し重複しますが、なるべくそこでの議論を引用せずに述べます。)

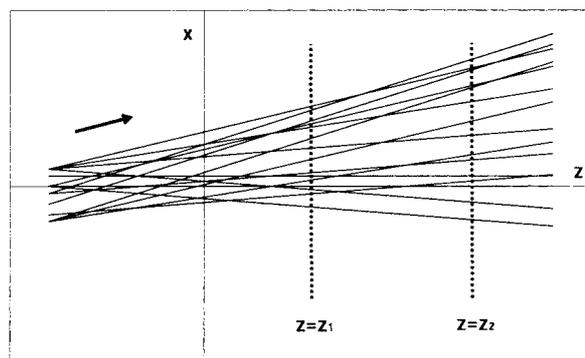


Fig. 2: Transformation of a beam in a drift space.

まず、一本の光線を指定する方法から考えます。ここでは、Fig.2 のような zx 面にのる光線だけを扱います。最初に、光軸としての z 軸にたいして、それに垂直な面をどこかに設定します。図中の $z = z_1$, $z = z_2$ のような面です。一本の光線は、どれか一つの面における座標と傾きの組 (x, x') によって指定することができます。

この (x, x') という値の組を、 xx' 平面上の一点と見なすことができます。そうすれば、ビームは xx' 面上の点集合として表現されます。この点集合が z 座標の増加とともに分布を変えていく様子が、ビームの伝播を表現するわけです。

さて、光線の集合がビームとして認識されるのは、対応する点集合が xx' 面上において局在している場合です。そこで、それらの点を囲う図形と、その内部の点数を指定すれば、ビームとしての特徴は捉えられます。

そのようにして決められる xx' 面上の図形は、エミッタンス図とよばれます。ビームの伝播は、エミッタンス図の形状の変化として捉えられることとなります。とくに重要なのはエミッタンス図の面積であり、これがエミッタンスとよばれます。

エミッタンス図の形状の変化を決めるものは、その内部の各点 (x, x') の動きです。面 $z = z_1$ を入り口、 $z = z_2$ を出口として、入り口での光線の x 座標と傾きを (x_1, x'_1) で表し、出口において (x_2, x'_2) とします。ドリフト空間においては光線は直線ですから、これらは次の関係で結ばれます。

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + Lx'_1 \\ x'_2 = x'_1 \end{cases} \quad (1)$$

ここで $L = z_2 - z_1$ です。上式を見るまでもありませんが、ドリフト空間においては光線の傾きは不変で、座標だけが変換をうけます。

上式は、1次変換のかたちで次のように書けます。

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

上式の右辺の行列は、ドリフト空間におけるトランスフォーマトリックスとよばれます。

この1次変換の性質は、 xx' 平面上の各点を変換の始点と見て、そこから終点まで矢印を引けば一目瞭然です。すなわち Fig.3(a) のようになります。エミッタンス図内部の各点がそれぞれ Fig.3(a) のベクトル場で押し流されることで、ビーム全体としては、たとえば Fig.3(b) のような変換を受けることになります。

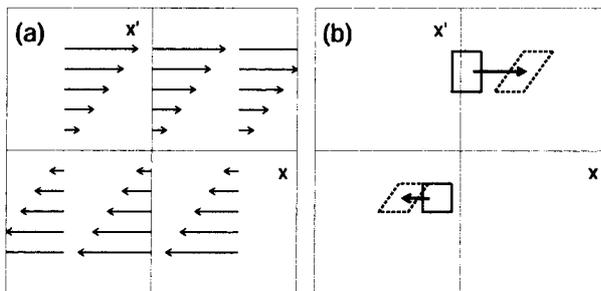


Fig. 3: (a) A vector field on xx' plane that represents the flow in a drift space. (b) Examples of the change of emittance diagrams in a drift space.

1次変換 (2) の最大の特徴は、面積、すなわちエミッタンスが不変に保たれることです。これは、Fig.3(a) のベクトル場の様子から理解されるでしょう。あるいは式でいうなら、(2) のトランスフォーマトリックスの行列式が1であるということです。

ドリフト空間におけるエミッタンスの不変性は、ドリフト空間でのビームの伝播から抽出された法則です。この法則は、決して自明なものではありません。

各光線が直線であるということから直ちにわかることでもなく、Fig.2を眺めていれば気がつくようなことでもないはずですが、一本一本の光線ではなく、その集団としてのビームを考えることの難しさが、この事実によって理解されるでしょう。

エミッタンスが不変であることの重要性について、もう少し述べておきます。光学系における z 座標は、力学における独立変数、すなわち時間の役割をはたします。そこで、 z の進行とともに面積が不変に保たれるという法則は、「保存則」としての意味をもちます。これはエミッタンス、すなわち xx' 面上の面積というものが、重要な物理量であることを教えています。

このエミッタンスの保存則は、力学におけるエネルギーとか運動量の保存則とは本質的に異なったものです。エネルギーや運動量は、一個の粒子の運動に沿って定義されるものです。しかしエミッタンスは、一本の光線がもつ量ではなく、複数の光線の集合によって初めて定義される量です。その意味で、エミッタンス図やエミッタンスは抽象的の高い概念です。

さて、 $z =$ 一定の面で光線の一本を指定するために、座標 x と傾き x' という二つの量をもちました。このうちのひとつとして x をもちいることに異論はないはずですが、一方 x' は、それほど必然性はありません。

光線が光軸となす角を α とすれば、傾きとは $x' = \tan \alpha$ という量です。しかし、要は光線の向きを指定できればよいわけですから、 x' のかわりに、たとえば角度 α そのものもちいてもよいはずですが。

近軸のみの議論に限定するならば、小さな角度しか扱わないので、 $\tan \alpha$ でも α でも、あるいは $\sin \alpha$ でも、数値的には区別がなされません。しかし、ドリフト空間に限れば近軸領域に限定する必要はなく、(1) や (2) はどんなに大きな傾きにたいしても成り立つわけです。

もし、エミッタンス図の縦軸をたとえば α にとったとすれば、その面上の変換は1次変換ではなくなります。しかし、簡単な計算でわかることですが、エミッタンス図を $x\alpha$ 平面に描いたとしても、あるいは $x \sin \alpha$ 平面であっても、面積はやはり保存されます。したがって、ドリフト空間を考える限りにおいては、エミッタンス図の縦軸を x' にとる必然性はありません。

われわれがエミッタンス図、あるいはエミッタンスという量に期待することは、それが「ビームの質」を表すということです。同じ光線数を含むビームであれば、なるべくエミッタンス図が局在していて、エミッ

タンスの小さい状態が望ましいものです。そのような指標としての役割をエミッタンスが果たすために、エミッタンス図をどのように定義するのが一番よいかを考えるべきです。この問題は、以下の節で考えていきます。

なお、そのような定義が定まるまでは、単にエミッタンス図とかエミッタンスというだけでは意味がはっきりしません。そこで以下の節では、たとえば $x\alpha$ 平面上で描いたエミッタンス図とか、その平面上のエミッタンスといういいかたをします。

8.3.2 ビームの形成

一般に性質のよいビームとは、細く絞られていて、しかも含まれる光線の方向がそろっているようなものです。ところが、ふつう光源としてもちいられるものは、すべての方向に光を放射します。そのような光源をただ空間に置くだけで、光は等方的にそこからひろがっていただけです。

そのような光源から方向のそろったビームを得るためには、Fig.4のような系をもちいればよいでしょう。すなわち、レンズの焦点面に光源をおいて、レンズを出たあとの光線の方向がそろうようにします。

もし光源が厳密な点光源であれば、レンズによって、どこまでも平行に進んでいくビームがつけられます。(実際は、回折現象によって少しずつひろがっていきますが、本章においては回折の効果は考えません。) 現実の光源は、有限のひろがりを持ちます。そのため、レンズを出たビームは角度幅 $\Delta\alpha$ をもち、レンズから離れるにしたがって徐々に広がってしまいます。

懐中電灯からの光がすぐひろがってしまうのは、光源であるフィラメントの大きさが原因です。レーザーがつくるビームはなかなかひろがりませんが、Fig.4の光源の大きさを限りなく0に近づければ、レーザーと同じ性質のビームがつけられます。もちろん、通常のフィラメントでそれをやると、強度が得られなくなります。

Fig.4の下方に示した図は、光源から出たビームが伝播していく様子を、 xx' 面上のエミッタンス図の変化として示したものです。

レンズがエミッタンス図におよぼす作用についても説明したいところですが、ビームにたいしてのレンズ作用はこれから考えるべきテーマです。ここでは、ガウス光学にもとづく変化を図に示すだけにしておきます。このような作図は近軸領域におけるもので

から、図のような状況が軸外領域でも可能かどうかは、まだわからないことです。

なお、ガウス光学にもとづく作図である以上、収差の寄与は含まれません。レンズが収差をもてば、エミッタンス図はFig.4のような多角形にはならず、ゆがんだ形状になります。

さて、このようにしてつくられたビームの内部に一点 P をとって、この点を通る光線がどのようなものかを考えてみます。Fig.5に状況を示します。

光源上の一点から出た光線は、レンズを通過したのちに決まった方向を向いた平行直線群となります。図では例として、光源の下端から出た光線を太線で描いています。光源上の各点と、レンズ通過後の光線の傾きが一対一に対応することがわかります。

点 P にやってくる光線は、光源上のすべての点から発せられたものですから、この点における光線の角度幅は、ビームを特徴づける角度幅 $\Delta\alpha$ と同一です。ただし、点 P がビームの周辺に近づいていくと、光線がケラれていって角度幅がしだいに減少し、ついには光線がやってこなくなります。

Fig.5において、点 P を複数の光線が通過するというに違和感をもたれる方がおられるかもしれませんが。すなわち、図の状況を波の言葉でいうと、光源の各点から出る球面波が、レンズを通過後にそれぞれ異なる方向に進む平面波に変換されます。ところが、それらの平面波は重ね合わされて最終的に一つの波がつくられるはずであり、よってその波面に直交する光線は、各点に一本しか存在しないはずで

このような発想は、光学の初心者には浮かばないはずのもので、ややレベルの高い「間違い」です。考えるべきポイントは、光源の異なる点から出た光を重ね合わせるという操作です。通常、光源の各点はそれぞれ位相の相関のない波を発生するので、位相を足し合わせるのは無意味です。すなわち、波として全体で一つになるわけではありません。複数の波が独立に存在し、そのそれぞれにたいして、点 P を通る一本の光線が対応するのです。

逆に、各点を通る光線が一本しかないような状況は、一個の点光源によってつくられるものです。そのような光線束にたいして、各点で直交する波面を描くことができます。それが前章までで述べてきたアイコンナールです。一般のビームは、そのような単一の波面で記述されるものありません。すなわちビームとは、「独立した別々の波が折り重なった状態」です。

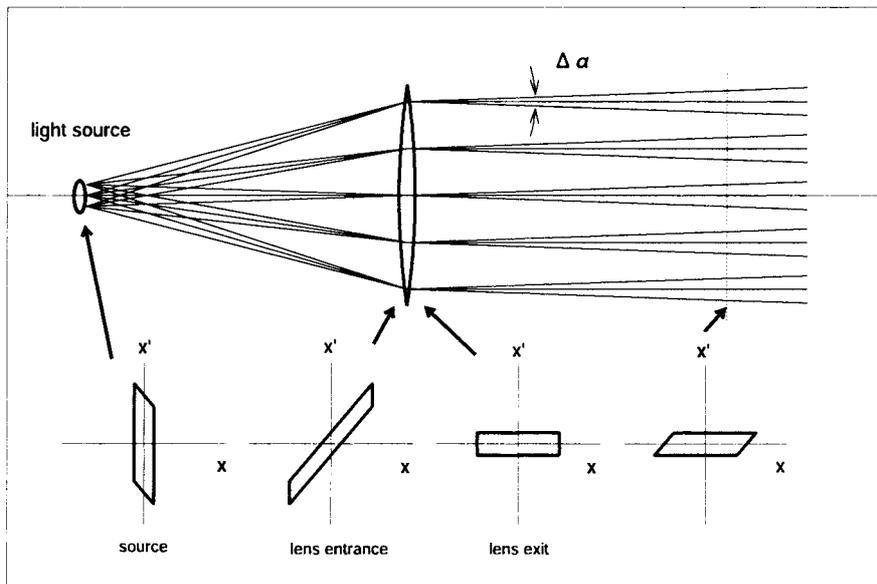


Fig. 4: Variation of emittance diagrams in a system which forms a parallel beam using a small light source.

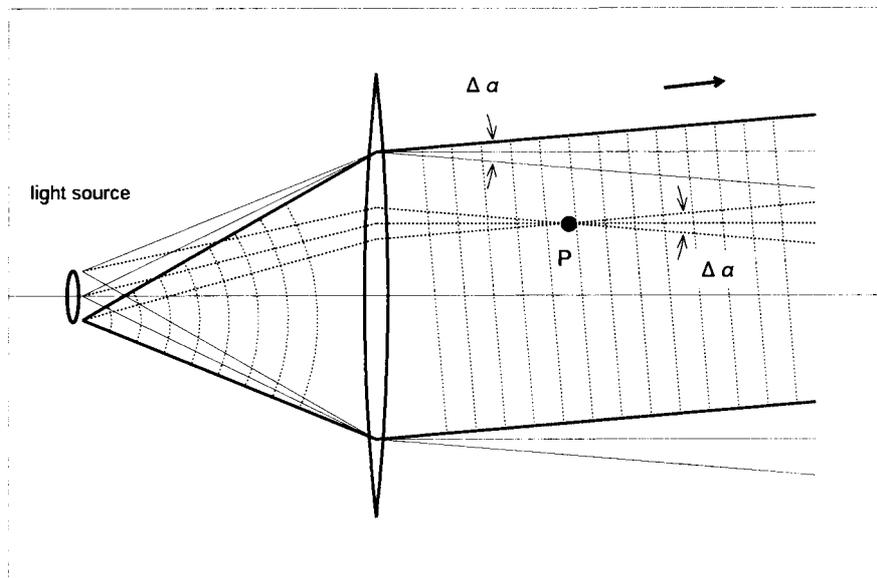


Fig. 5: Every points on a light source emit independent spherical waves, and each wave corresponds to the ray passing through P .

8.3.3 ビームを特徴づける量

前節で示したような方法で、ほとんど平行なビームをつくることができます。そのようなビームの形状は、Fig.6(a)のように、ビーム幅 Δw と角度幅 $\Delta\alpha$ によって大まかに特徴づけられます。

この図のビームを、Fig.6(b)のように角度 α だけ全体的に回転してみます。前節までにおいて、ビームを記述するためにエミッタンス図というものを持ちてきました。回転前のビームを A, 回転後を B として、これらのビームにたいするエミッタンス図を描いてみると Fig.7(a) のようになります。ただし縦軸として、光軸となす角度 α をもちいています。

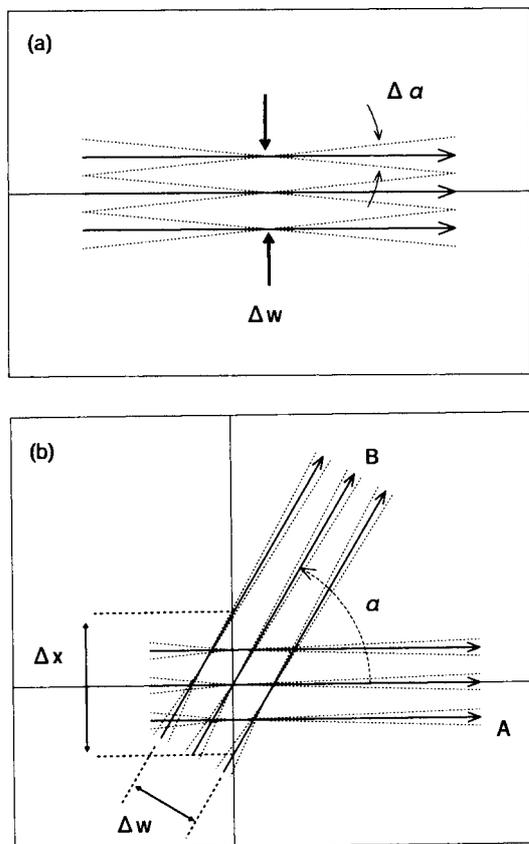


Fig. 6: (a) A beam with width Δw and angle width $\Delta\alpha$. (b) Rotation of the beam shown in (a).

Fig.7(a) の二つのエミッタンス図を比較すると、ビームが回転されることで、エミッタンス図の面積、すなわちエミッタンスが増加することがわかります。この理由は、ビームの幅 Δw そのものは不変であるのに、 x 座標の幅 Δx は α の増加とともに大きくなるからです。一方、角度幅 $\Delta\alpha$ は回転しても同じですから、結果として、回転角の増加とともにエミッタンスが大きくなります。

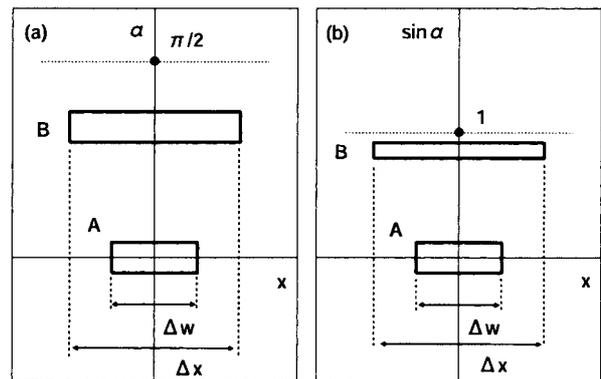


Fig. 7: Emittance diagrams drawn on (a) $x\alpha$ plane, and (b) $x \sin \alpha$ plane for the beams in Fig.6(b).

ビーム幅 Δw と x 座標の幅 Δx は、次の関係にあります。

$$\Delta w = \Delta x \cos \alpha \quad (3)$$

そこで、エミッタンスは $\cos \alpha$ に反比例して、 α とともに増加していきます。

なお、Fig.7(a) ではエミッタンス図の縦軸に α をもちいていますが、もし近軸理論にしたがって縦軸を $x' = \tan \alpha$ にしたら、かえってエミッタンスの変化の比率が増えることになります。($y = \alpha$ と $y = \tan \alpha$ のグラフを思い浮かべましょう。)

さて、今考えている回転という操作は、単にビームの向きを変えるだけなので、ビームの質が変わるわけではありません。なんとすれば、鏡をもちいれば容易に互いに他への変換が可能ですから、両者に優劣はないと考えるべきです。われわれは、エミッタンス図のひろがりやビームの質を結び付けたいわけです。したがって、回転によってエミッタンスが変わってしまうのでは具合が悪いことになります。

そこで、エミッタンス図の縦軸を定義し直して、回転によってエミッタンスが不変であるようにできるかどうかを考えてみます。

ビームの回転によってエミッタンスが増えてしまったのは、(3) の $\cos \alpha$ の因子のせいです。よって、エミッタンスを不変に保つためには、この増加因子が打ち消されるように縦軸を定義し直せばよいわけです。すなわち、 α の増加とともに、角度幅に $\cos \alpha$ の因子がかかるようにします。

結論をいえば、縦軸を α から $\sin \alpha$ に変更すればよいのです。 $y = \sin \alpha$ とおけば $dy/d\alpha = \cos \alpha$ 、あるいは $dy = \cos \alpha d\alpha$ から、

$$\Delta(\sin \alpha) = \cos \alpha \Delta\alpha \quad (4)$$

という関係がわかります。すなわち、縦軸の増分 $\Delta(\sin \alpha)$ と角度幅 $\Delta \alpha$ の間に $\cos \alpha$ という因子がかかります。

縦軸を $\sin \alpha$ にとることでエミッタンスが不変になる様子を Fig.7(b) に示します。 α の増加によって横幅が増える分、縦方向に圧縮されて、面積は一定に保たれます。

さて、いままではビームの形状だけに注目していましたが、ビームに含まれる光線量を考慮するために、単位ビーム幅、単位角度幅あたりに含まれる光線数として、光線数密度 b を定義します。ビーム全体に含まれる光線数をフラックスとよんで Δf と書くと、Fig.6(a) のビームのフラックスは次式で与えられます。

$$\Delta f = b \Delta w \Delta \alpha \quad (5)$$

ビーム全体としての強度は、このフラックスによって示されます。

Fig.6(a) のようなビームの描き方をするなら、 b の増加にしたがってビーム内部がたくさん光線が埋められていって、だんだんビームが濃く見えてきます。 b をこのような「ビームの濃さ」というイメージで考えれば、本節における議論がわかりやすいはずで。

本来は、ビームが運ぶエネルギーによって強度を定義したいところですが、いまは zx 平面上にのるような厚みのないビームを扱っているので、エネルギーを考慮することができません。そこで当座の処置として、光線の数によってビーム強度を表すわけです。

なお、二次元的な断面積をもったビームはのちの節で扱います。その際には、ビームの単位面積、単位立体角あたりのエネルギーとして輝度 B が定義されます。(それを見越して、 B の小文字の b をここでもちいています。)

次に、ビームの光線数密度 b とエミッタンス図の関係を考えます。先に議論したように、エミッタンス図を $x \sin \alpha$ 面上に描けば、ビームを回転しても面積は不変です。そこで、ある一定の光線数を含むビームを次々に回転していきながら、対応するエミッタンス図を $x \sin \alpha$ 面上に描いていけば、それらはすべて面積も光線数も共通となります。

そこで、ビームの光線数密度 b は、 $x \sin \alpha$ 面上の図形に含まれる光線数を与える密度量と見なすことができます。なんとすれば、(3) を (5) に代入すれば次式が得られます。

$$\Delta f = b \Delta x \Delta \alpha \cos \alpha \quad (6)$$

上式において、 $\Delta x \Delta \alpha \cos \alpha = \Delta x \Delta(\sin \alpha)$ は $x \sin \alpha$ 面上の面積要素ですから、(6) は b がその平面上の光線数密度であることを示しています。

そこで、 b をひとつのビームの強度を指定する量と考えるのではなく、 $x \sin \alpha$ 面上の密度分布 $b = b(x, \alpha)$ として与えることで、一般に空間のひろい領域をみたす光の場を表現することができるようになります。

もっとも簡単な場合として、空間のすべての方向に均等な強度で飛びかう光の場を想定してみます。そのような場に含まれるビームの一つを切り出して考えれば、それを任意の角度だけ回転したビームも、やはり場の構成要素であるはずで。よって、そのような場は $x \sin \alpha$ 面上の様な密度分布に対応するはずで。すなわち、 $x \sin \alpha$ 面上のすべての点において b が同一の値をとるような場合です。(もちろん $|\sin \alpha| \leq 1$ の範囲においてです。)

このような場を以下の節で繰り返し考察することになりますが、これを**等方的な場** (isotropic field) といいます。通常は、 $z =$ 一定の面を z の負の側から正の側に通る光線しか考察しないので、等方的といっても、逆向きの光線は含まれていない場合があります。たとえば、面光源の片方の面から放出される光が等方的であるという場合、逆向きの光線は含まれていません。

さて、エミッタンス図を $x \sin \alpha$ 面において定義することで、ビームの回転によってエミッタンスが変わることが防がれました。この処置は、光学系の記述方式に起因する本質的な意味をもっています。この事情について下に触れておきます。

われわれが光学系というものを考える際に、まず光軸として z 軸をとり、それを基準にビームの伝播を表そうとします。すなわち、ビームを z 座標が一定の面で切りながら、その断面が z 座標とともにどう変化するかという観点で光学系の作用が述べられます。

ところが、ビーム幅 Δw という量は、一般には z 座標が一定の面上で定義される量ではありません。Fig.6(b) を見ればわかるように、これは異なる z にまたがった量です。われわれは Δw ではなく、 Δx によってビームの空間的なひろがり記述しなければなりません。これは、力学系の時間発展を論じる際に、ある一定の時刻において意味をもつ量が幾何学的量と見なされるのと同様です。

このように、 x 軸に射影した成分に注目する立場では、もともと同一の対象であっても、回転すると違ったものに見えてしまいます。上で考えた因子 $\cos \alpha$ は、回転による長さの射影成分の変化を打ち消すための

ものであり、光学理論において必然的に現れるべきものです。

8.3.4 スネルの法則

ここでは、連続的な屈折率分布を考えて、その中でそのビームの伝播を考えます。任意の屈折率分布は、屈折率が不連続に変化するような屈折面が並んでいる状況で近似できます。そこで、ひとつの屈折面によってビームがこうむる影響を考察すれば、それで本質は尽くされます。

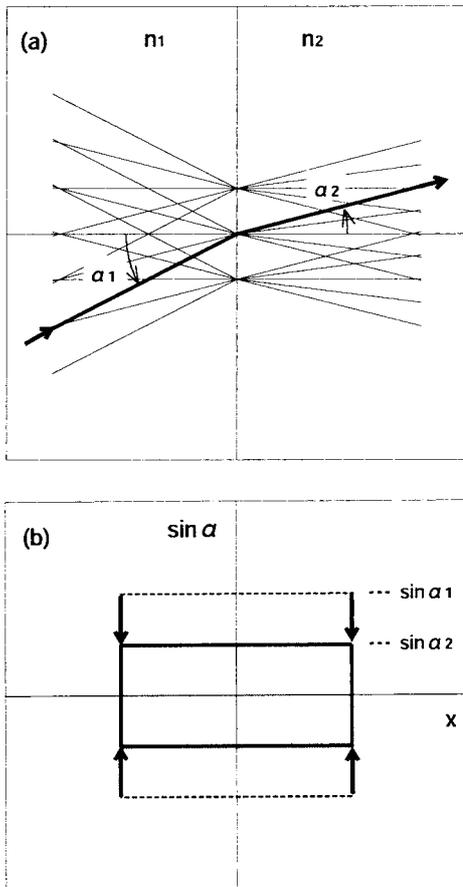


Fig. 8: (a) Refraction of rays at the interface of refractive index. (b) Change of the emittance diagram at the interface.

空気中から水面に光が入射する場合のように、屈折率が不連続に変化する境界における光線の向きの変化は、スネルの法則にしたがいます。境界面で屈折率が n_1 から n_2 に変わるとして、境界面の法線から測った光線の入射角と出射角をそれぞれ α_1 , α_2 とすれば、スネルの法則は次式で与えられます。

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \quad (7)$$

Fig.8(a) はこの状況を示しています。

(7) を見ればわかるように、境界面におけるビームのエミッタンス図の変化は、 $x \sin \alpha$ 面上に描くのが適しています。(前節では、まったく別の議論で $x \sin \alpha$ 面が採用されたわけです。)

実際に、屈折前後のエミッタンス図を $x \sin \alpha$ 面上に描くと、Fig.8(b) のようになります。屈折面において n が増える場合には、それに反比例して $x \sin \alpha$ 面上のエミッタンスが減少し、そしてそれはビームの質が向上したことを意味します。屈折率が減る場合には、逆にビームの質が劣化します。

電子光学系においては、加速ポテンシャル分布を $\Phi = \Phi(x, y, z)$ とすれば、 $\Phi^{1/2}$ が屈折率に対応するのでした。そこで、ビームを加速すればするほどエミッタンスが減少し、ビームの質がよくなるわけです。一方、ビームを減速すべきなんらかの理由がある場合には、それに伴う質の劣化は避けられません。

さて、光学系における光線のふるまいは、すべてスネルの法則に帰着されます。輝度不変則に関する議論に限らず、光学系の一般的な性質を考える際には、スネルの法則がなぜ成り立つのかを十分に理解しておく必要があります。

第7章で述べた見方によれば、光線には波が付随し、光線の行き先はこの波のふるまいによって決定されます。波としての光の波長は屈折率に依存し、屈折率が大きいほど波長は小さくなります。この波長の変化と、屈折面において波面が連続であるべきことから、スネルの法則が導かれます。詳しく述べれば以下ようになります。

まず、光線に付随した波を記述するために、光線に沿って定義される下式のベクトルをもちいると便利です。

$$\mathbf{P} = n\mathbf{U} \quad (8)$$

ここで \mathbf{U} は光線に沿った単位ベクトルです。

\mathbf{P} は光線に沿った光路長の増加率を表し、光学ではふつう光線ベクトルとよべれます。(これは第3章でもちいた測地ベクトルに他なりません。) 波を記述するために、位相の増加率としての波数ベクトルをもちいてもよいのですが、ここでの目的のためには \mathbf{P} のほうが便利です。

屈折面の前後においては、波面が連続につながるべきです。これは、屈折面に沿っての光路長の変化が、屈折の前後で連続であることを意味します。そこで Fig.9 に示すように、光線ベクトル \mathbf{P} の屈折面方向の射影成分 $p = n \sin \alpha$ が屈折前後で不変でなければな

りません。すなわち $p_1 = p_2$ であり、これは (7) そのものです。スネルの法則の証明はこれで終了です。

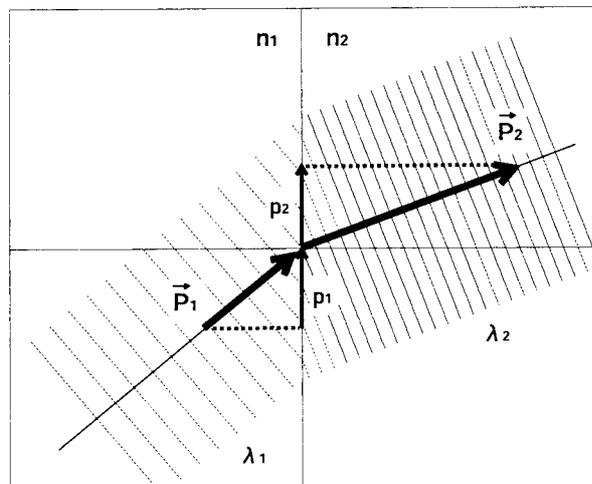


Fig. 9: Refraction of a plane wave. The x component of ray vector vcP is conserved in the refraction.

ここで、屈折面の存在とは無関係に、光線に沿って次の量を定義することができます。

$$p = n \sin \alpha \quad (9)$$

すなわち、 \mathbf{P} の x 方向成分です。 \mathbf{P} は長さが n に等しいという条件があるので、 \mathbf{P} の成分は独立ではありません。よって、 n が一定の領域では、 \mathbf{P} を指定するには x 成分を示せば十分です。

さて、もし z 軸に垂直な屈折面が存在すれば、上式で定義される p は屈折の前後で不変であり、すなわち保存量となるわけです。その屈折の際には、当然ながら光線の x 座標の値も不変です。よって、もし xp 面上、すなわち $nx \sin \alpha$ 面上でエミッタンス図を描くなら、この図形は屈折前後でまったく形状を変えないことになります。

ここまでの議論は、屈折面が z 軸に直交する場合でしたが、ここで屈折面が任意の方向を向いている場合を考えましょう。Fig.10 のような状況です。

このときは、まず屈折面に直交する方向に局所的な $z'x'$ 座標をとり、 $z' = z'_1$ 面から $z' = z'_2$ 面までのエミッタンス図の変化を考えます。この座標系において、エミッタンス図を $x'p'$ 面上に描くなら、屈折面によって図形は不変に保たれます。また、その前後のドリフト空間において、エミッタンス図の形状は変わるものの、面積は不変です。すなわち $z' = z'_1$ 面から $z' = z'_2$ 面に至るビームの伝播において、 $x'p'$ 面上のエミッタンスが保存されます。

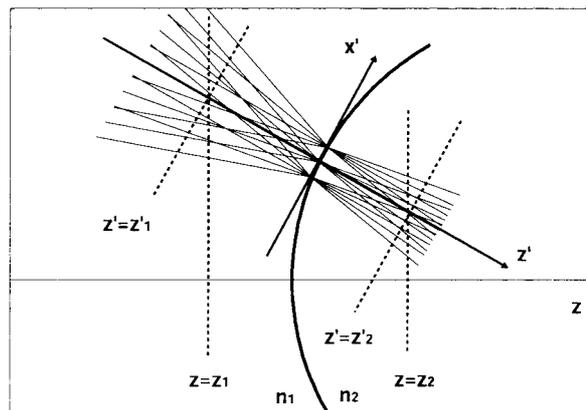


Fig. 10: An emittance on $nx \sin \alpha$ plane is preserved at the interface having an arbitrary angle with an optical axis.

次に、 $z' = z'_1$ 面と $z' = z'_2$ 面を、もとの z 軸に直交する方向に回転して、 $z = z_1$ 面と $z = z_2$ 面とします。この座標の変換によってエミッタンスは変化しないことを、前節で示したわけですが、(前節ではビームを回転しましたが、座標を回しても同じことです。) したがって、 $z = z_1$ 面と $z = z_2$ 面で比較したエミッタンスも同一であることが結論されます。

任意の屈折率分布中でも、このような屈折面が連続的に並んだ状況と考えられます。したがって、エミッタンス図を $nx \sin \alpha$ 面上で描くなら、どんな場合でもエミッタンスが保存されることが示されたこととなります。

ここまでの議論においては、屈折という作用だけが考慮され、結像とか収差という概念は含まれていませんでした。すなわち、ここで導かれた保存則は、光学系の結像作用とか収差の有無とはまったく無関係に成立するものです。

さて、上で見たように、 $p = n \sin \alpha$ は重要な物理量です。しかし、 $nx \sin \alpha$ 面上でエミッタンス図を描くことがいつでも便利であるわけではありません。ビームの質をエミッタンスと結びつける際には、ビームの形状を決める x と $\sin \alpha$ という変数の変化に注目したいわけです。その目的のためには、 n という変数は余計になります。

すなわち、屈折の前後で「 $nx \sin \alpha$ 面上のエミッタンスが不変である」ということより、同じ屈折によって「 $x \sin \alpha$ 面上のエミッタンスが増減する」という事実が重要なのです。この事情は Fig.8 のところで述べたとおりです。

このように、本節の最初の状況に戻って、エミッタ

ンス図を $x \sin \alpha$ 平面で考えるほうが実用的です。この立場においては、 n によってエミッタンスは増減しますが、もとの屈折率と等しい場所に移ればエミッタンスはもとに戻ります。

この意味での $x \sin \alpha$ 面上での面積保存則を、一般の場合、すなわち x と y の両方向にひろがりをもつビームに適用すれば、輝度不変則となります。このことは §8.5.2 で示します。結局、輝度不変則の証明は、本節において実質上済んでしまったこととなります。

8.4 光源の特性

8.4.1 光と温度

光の場あるいはビームにたいして、温度の概念を導入することができます。温度とは本来、注目する系が熱平衡の状態に達した段階で、はじめて導入されるものです。熱平衡という状態が、光の場にたいしてありうるということをまず見ておきましょう。

温度 T に保たれた熱源 H というものを考えます。これは、ヒーターなどで温度が強制的に一定に保たれているものとします。Fig.11(a) のように、その熱源に物体 A を接触させます。最初は熱源と異なる温度であっても、十分時間がたてば熱平衡に達して、 A は H と同一の温度になるでしょう。

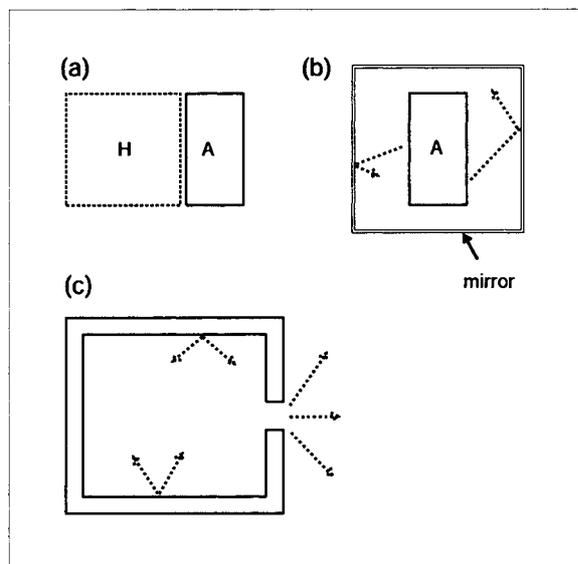


Fig. 11: Temperature equilibrium realized by thermal radiation. (a) Object A attached to heat source H . (b) Object A located in a mirror room. (c) Cavity radiation.

その状態で熱源を遠ざけると、物体 A の温度は一定には保たれず、徐々に冷えていきます。これは、い

わゆる放射冷却の現象です。一般に、有限の温度をもつ物体は、電磁波の形態でエネルギーを放出します。物質はその温度に対応した光を出し、これが熱放射とよべれます。(むかしは「輻射」といういいかたがされましたが、いまは当用漢字に限定する理由で放射ということが多くなっています。)

物体 A は光を放出しながら徐々に冷えていくわけですが、物体のまわりを鏡で囲ったらどうなるでしょうか。この場合、物体は自分の出した光で照り返され、放出したエネルギーが戻されることとなります。最初は物体 A を熱源に接触させたまま鏡の部屋に入れば、光は次第に部屋中に充満し、いつかは物体 A から出るエネルギーと返されるエネルギーがつりあって、平衡状態に達します。そうなれば、熱源 H を部屋から出しても、物体 A の温度は T のまま保たれます。これが Fig.2(b) の状態です。

この状態での光の場、すなわち放射場を、温度 T の熱平衡に達した状態と見なすことができます。すなわち、放射場に温度というものが定義されるわけです。

温度 T の放射場をつくるためには、Fig.2(c) のように物質 A で囲んだ部屋をつくり、その部屋全体を温度 T に保つほうが簡単です。壁からは温度 T に対応した放射場が出されて、部屋の内部の放射場は熱平衡が保たれます。

Fig.2(c) の状態で作られる光の場が、いわゆる空洞放射とよばれるものです。部屋の一部に小さな穴をあければ、そこからもれて出てくる光は、温度 T の熱平衡の状態をそのまま保っているはずで、それをレンズで集め、あるいはプリズムに通して分光することで、熱放射の研究がなされます。

温度 T に保たれた物質が、その温度の空洞にあけた穴と同じ性質の光を出す場合、その物質を黒体 (black body) とよびます。もともと黒体とは、照射した光をすべて吸収する物質として定義されたものです。そのような物質は、ある温度にたいして許される最大の熱放射を行うことが示されます。一般の物質 (灰色体) は、同じ温度の黒体よりも熱放射の量が少なくなります。

歴史的には、溶鉱炉の色と温度の関係を知りたいという産業界からの要請があり、黒体という概念はその研究の過程で生まれたものです。黒体は空洞で置き換えるというアイデアはキルヒホッフによるもので、これによって黒体放射の研究が飛躍的に進んだという事情があります。

固体内部における原子と光の相互作用は非常に複

雑です。しかし空洞内の光であれば、それを電磁波として定常波の重ね合わせで表したり、あるいは光子の集団と考えて気体分子運動論を適用することが可能になります。黒体からの放射光は、物質の内部で光が熱平衡に達し、その温度の情報を担った光が外部に漏れ出てきたものと考えることができます。

8.4.2 完全拡散面とランバート則

黒体と見なしうる物質を光源としてもちいましょう。黒体を加熱して出てくる光は、前節で述べた空洞放射と同じ性質をもちます。

空洞内部の放射場は、空洞の形状とは無関係に、完全に等方的です。これは、任意の形状の容器に入れた気体分子が、ある決まった方向に運動しやすいということがないのと同様です。

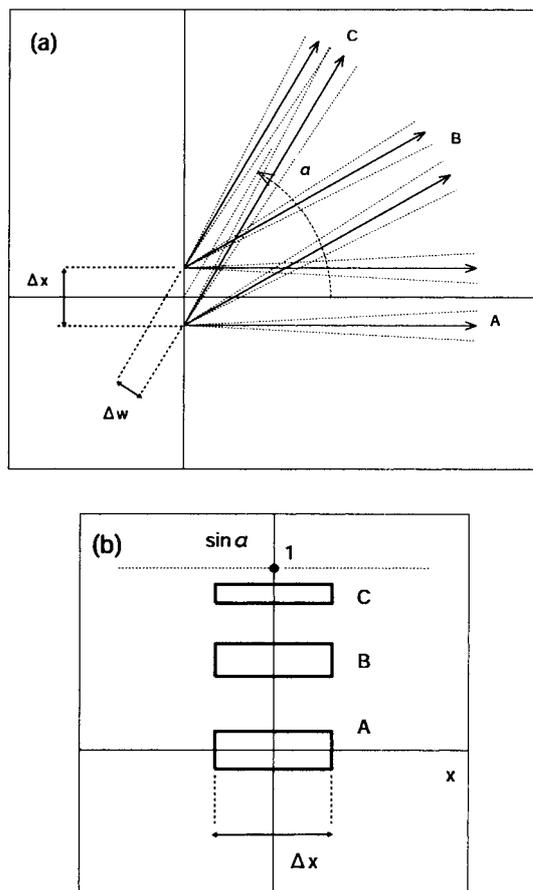


Fig. 12: (a) Beams having the same width of x coordinate. (b) Emittance diagrams for the beams shown in (a).

§ 8.3.3 で述べたように、一般にビームの強度は、ビームの単位幅と単位角度幅あたりの光線数密度 b か

ら計算されます。もし等方的な放射場があれば、その場に含まれるビームはすべて同じ b をもちます。そして、そのような等方場は、 $x \sin \alpha$ 面上において一様な数密度 b をもつ分布に対応するのでした。

このことから、熱平衡にある黒体からの放射は、もしその面積が無限にひろければ、 $x \sin \alpha$ 面上の一様分布として表現されます。この事実が、光の集中度と温度との関係を考える際に重要な意味をもってきます。

さて、黒体表面上で Δx の幅をもった領域から出てくる光だけに注目してみます。これは、空洞に幅 Δx の穴をあけたときに、そこから出てくる光を考えるのと同じです。そのときの光は、 $x \sin \alpha$ 面上の一様分布から、 x 方向に Δx の幅の部分だけ切り取った分布に対応することになります。

Fig.12(a) は、そのうちの三方向のビームを抜き出して示したものです。これらは共通の角度幅 $\Delta \alpha$ をもつとします。この三つのビームを $x \sin \alpha$ 面上のエミッタンス図として示すと、Fig.12(b) のようになります。

Fig.12(a) からわかるように、角度 α の増加とともにビーム幅 Δw が $\cos \alpha$ の依存性で減っていきます。そこで、ビームに含まれる光線数もこの比率で減少します。これは、Fig.12(b) におけるエミッタンス図の面積の比率に対応します。

このことは、§ 8.3.3 における (6)、すなわち、

$$\Delta f = b \Delta x \Delta \alpha \cos \alpha \quad (10)$$

をもちいて説明することもできます。図の三つのビームは b 、 Δx 、 $\Delta \alpha$ が共通ですから、ビームが含む光線数は $\cos \alpha$ の依存性で減少します。

もし空洞にあけた穴の幅 Δx が十分小さければ、その穴を、放射強度が $\cos \alpha$ の方向依存性をもつ点光源と見なすことができるでしょう。しかし、もし本当に点光源であったなら、それからの放射は方向とは無関係のはずです。すなわち、 $\cos \alpha$ 依存性を説明することができません。

結局、この $\cos \alpha$ の依存性というものは、面光源の、そしてとくに黒体表面がもつ特性であるわけです。黒体のサイズが大きくても、その表面の一部分からの光だけに注目すれば、やはり $\cos \alpha$ 依存性が生じます。

このように、面光源の一定領域からの光強度が法線からの角度のコサインに依存して減少することを、ランバートの余弦則 (Lambert's cosine law) といいます。ランバート則にしたがって光を出す面は、完全拡散面とよばれます。

完全拡散面という用語は、もともと入射した光を乱反射する面にたいしてのものですが、発光面にたいしても同じいい方がなされます。光源としての黒体表面はランバート則をみたし、したがって完全拡散面であるわけです。

注意すべきは、ランバート則はあくまで、光源面の一定領域からの光に限定した場合の話であることです。上の議論はもともと、等方的な場に関するものであることを忘れてはなりません。放射領域を限定せずに、無限に広がった光源面を考えれば、放射場は特定の方向というものを持たなくなります。

これから結論されることとして、完全拡散面はどんな方向から見ても同じ明るさに見え、凹凸があっても見分けがつかせません。太陽を肉眼で見ると、球体ではなく、単なる平板のように見えます。これは太陽からの光がランバート則をみたすことを意味します。これはもちろん、太陽内部で光の熱平衡状態がつけられていることの反映です。

ランバート則は、もし面光源の表面を点光源がびっしりと敷き詰められたものと見なすなら、決して説明がつかないようなものです。もしそのような光源があれば、面を斜めから見れば単位面積あたりの強度は増えて、より明るく見えるでしょう。よって、表面に凹凸があれば見分けがつかずです。

この事実は、黒体内部で起きている現象についてのヒントを与えます。物質を加熱した場合、原子内部において、動きやすい価電子が熱振動によって揺さぶられ、その振動が電磁波を放射するというモデルを考えたいです。荷電粒子が加速度をもてば、それは電磁波を放射しますから、それが熱放射であると考えるわけです。だとすれば、各原子がそれぞれ点光源としてはたらくはずですが、それではランバート則を説明できません。

実際はどうかといえば、物質内部でつくり出された光が表面に達するまでに、何度も非弾性散乱、たとえばコンプトン散乱やラマン散乱を受けます。これによって物質内部で熱平衡に達することができ、表面から漏れ出てくる放射場が、同じ温度の空洞放射におけるものと一致するのです。

8.5 輝度の性質

8.5.1 光源面の結像

ビームを $x \sin \alpha$ 面上のエミッタンス図として表したとき、この面積、すなわちエミッタンスは、屈折率

の等しい空間で比較するなら不変に保たれます。これは §8.3 で見たとおりです。一方 §8.4 では、黒体表面からの放射は、その等方性を反映して $x \sin \alpha$ 面上の様な光線数密度分布として表されることがわかりました。

これら二つの事実は、一応は独立なものです。すなわち、エミッタンスの不変性は光学系というものの特性であり、一方、黒体放射の等方性は、光源の性質であって光学系とは無関係です。

エミッタンスの不変性が温度の問題とどうかかわるかは §8.6.1 で議論しますが、そのまえに、光源が光学系によって結像される様子を詳しく調べておく必要があります。

Fig.13 のような光学系を想定し、物面 $z = z_o$ と像面 $z = z_i$ でのエミッタンス図の関係を考えます。物面と像面の屈折率は等しいと仮定し、物面におけるエミッタンス図を $x_o \sin \alpha_o$ 面上で表し、像面では $x_i \sin \alpha_i$ 面上で表します。

まず物面において、座標範囲 $\pm x_o$ と角度範囲 $\pm \alpha_o$ を占めるビームを考えます。これに対応するエミッタンス図が Fig.13 の左下の大きな長方形で表されています。(座標変数としての x_o , α_o と、ビームを指定する x_o , α_o が同じになってしましますが、混乱はないでしょう。)

このビームが光学系で結像されて、像面で座標範囲 $\pm x_i$ と角度範囲 $\pm \alpha_i$ を占めるビームに変換されるとします。これが Fig.13 の右下の長方形です。物面と像面との間で $x \sin \alpha$ 面上の面積保存則を適用すれば、

$$x_o \sin \alpha_o = x_i \sin \alpha_i \quad (11)$$

が得られます。

上式は、光学系は収差をもたないということが仮定されています。もし系が収差をもてば、像面におけるエミッタンス図は長方形にはならず、一般にはゆがんだ形状になるはずで

一般の光学系において面積保存則を考慮するためには、有限のひろがりをもったビームではなく、その微分に相当するものを考えるべきです。すなわち、細く絞られたビームに対応する微小な面積要素を考え、それに対して面積保存則を適用します。この処方方を以下で述べます。

物面において、微小な座標幅 Δx_o と微小な角度幅 $\Delta \alpha_o$ をもつビームを考えます。このビームは、 $x_o \sin \alpha_o$ 面において、 $\Delta x_o \Delta \alpha_o \cos \alpha_o$ という面積要素に対応します。

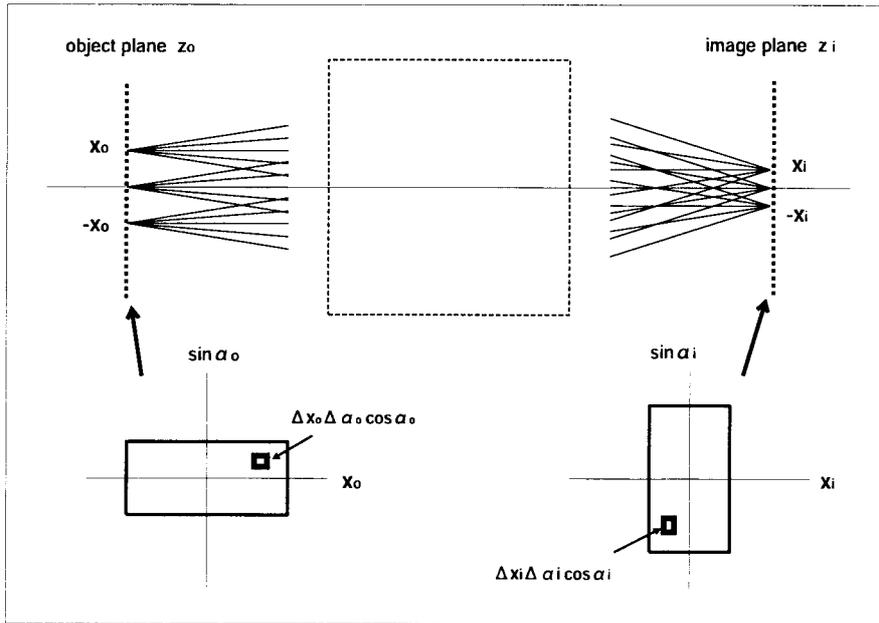


Fig. 13: An imaging system and the emittance diagrams at the entrance and exit of the system.

$x \sin \alpha$ 面上の面積保存則を面積要素にたいして示せば,

$$\Delta x_o \Delta \alpha_o \cos \alpha_o = \Delta x_i \Delta \alpha_i \cos \alpha_i \quad (12)$$

となります。この式の左辺を、座標に関して $-x_o$ から x_o まで、角度に関して $-\alpha_o$ から α_o まで積分し、右辺は、収差のない結像のもとで像面において対応する領域で積分すれば、(11) が得られることとなります。

さて、物面において上記の面積要素に含まれる光線数は、§ 8.3.3 における定義にしたがって、

$$\Delta f_o = b_o \Delta x_o \Delta \alpha_o \cos \alpha_o \quad (13)$$

で表されます。上式における光線数密度 b_o は、もし光源が黒体であれば定数であり、この値は温度だけで決まります。

黒体ではない、一般の光源の場合は、 b_o は $x_o \sin \alpha_o$ 面の各点ごとに違ってよく、 $b_o = b_o(x_o, \alpha_o)$ という関数の形で表されることとなります。 $x_o \sin \alpha_o$ 面上の一点における面積要素 $\Delta x_o \Delta \alpha_o \cos \alpha_o$ によって、細く絞られたビームが指定され、そのビームの光線密度を与えるものが $b_o(x_o, \alpha_o)$ です。

なお、ある一定の温度にたいしては黒体の b_o が可能な最大値であり、どんな物質であっても、これを上回る値が実現されることはありません。すなわち、 $b_o = b_o(x_o, \alpha_o)$ という分布の最大値は、同一温度の黒体の b_o か、あるいはそれ以下の値しかとりえません。

さて、面積が保存されるのであれば、その面積要素に付随した光線数密度も不変に保たれます。よって、像面での光線数密度を b_i と書けば、

$$b_o = b_i \quad (14)$$

となります。これは、光学系における面積要素の移動を追いかけて考えるなら、すなわち一つのビームに沿って考えるなら、 b は同じ値に保たれるという意味です。(14) が、一般の場合の輝度不変則に相当するものです。

(14) は自明ですが、のちのために、形式的な導き方を示しておきます。物面から像面までで、ビームに含まれるフラックスが保存されますが、これを式で表せば、

$$b_o \Delta x_o \Delta \alpha_o \cos \alpha_o = b_i \Delta x_i \Delta \alpha_i \cos \alpha_i \quad (15)$$

となります。これと (12) を組めば $b_o = b_i$ が得られます。

次に、物面で有限な座標範囲 $\pm x_o$ と角度範囲 $\pm \alpha_o$ を占めるビームを考えます。もし光源が黒体であれば、このビームに含まれる全光線数 f_o は、単にエミッタンス図の面積 $(2x_o)(2 \sin \alpha_o)$ に b_o をかければよく、

$$f_o = 4b_o x_o \sin \alpha_o \quad (16)$$

となります。この式は、(13) を座標に関して $-x_o$ から x_o まで、角度に関して $-\alpha_o$ から α_o まで積分したものです。

(13)を積分して(16)になるのは、黒体の場合だけです。もし一般の $b_o = b_o(x_o, \alpha_o)$ という特性の光源であれば、この関数形を考慮して(13)を積分する必要があります。

以上は物面と像面の屈折率が等しい場合ですが、一般にそれらが異なる場合も述べておきます。この場合に保存されるのは $n_x \sin \alpha$ 面上の面積ですから、まず(12)は次のように修正されます。

$$n_o \Delta x_o \Delta \alpha_o \cos \alpha_o = n_i \Delta x_i \Delta \alpha_i \cos \alpha_i \quad (17)$$

ここで、物面と像面の屈折率がそれぞれ n_o, n_i です。

一方フラックス保存の式(15)は、これは単に b_o と b_i の定義式ですから変更はありません。よって(15)と(17)から、

$$b_i = \frac{n_i}{n_o} b_o \quad (18)$$

が得られます。すなわち、屈折率が増加すればエミッタンスが減少し、光線数密度が増加するわけです。これはすでに§8.3.4において、一つの屈折面の作用として見たものです。

また、(11)を一般化した式は、

$$n_o x_o \sin \alpha_o = n_i x_i \sin \alpha_i \quad (19)$$

となります。これは、のちにでてくるアッペの正弦条件とほとんど同内容のものですが、より一般的な関係式です。(19)は**光学的正弦条件 (optical sine condition)**とよばれます。

(19)は、 $n_x \sin \alpha$ 面上の面積保存則だけから導かれた関係であり、光源が黒体であるかどうかとは無関係に成り立つものです。ただし(11)と同様に、この式も光学系が収差をもたないことが仮定されています。

上式を近軸領域で考えれば、光線の角度が小さいので、

$$n_o x_o \alpha_o = n_i x_i \alpha_i \quad (20)$$

で近似されます。上式の両辺は、**ヘルムホルツ-ラグランジェの不変量 (Helmholtz-Lagrange invariant)**とよばれ、ガウス光学に属する量です。すでに§8.3.1で触れたように、ガウス光学では小さな角度だけが対象となるので、 α でも $\sin \alpha$ でも区別がありません。

本節ではいろいろな関係式が導かれましたが、これらはすべて $x \sin \alpha$ 面上、一般には $n_x \sin \alpha$ 面上における面積保存則から得られるものです。

8.5.2 輝度の定義と輝度不変則

本章におけるここまでの議論では、 zx 平面上にのるような厚みのないビームを考えていました。しか

し、このままでは現実に測定される物理量と結びつけることができません。

x, y 両方向のひろがりを考えるために、前節までの座標の幅 Δx を xy 面上の面積要素 ΔS でおきかえ、また角度幅 $\Delta \alpha$ を立体角 $\Delta \Omega$ でおきかえます。その上で、ビームに含まれる光線数のかわりに、そのビームによって単位時間に運ばれるエネルギー量を考え、その量をフラックス ΔF として与えます。

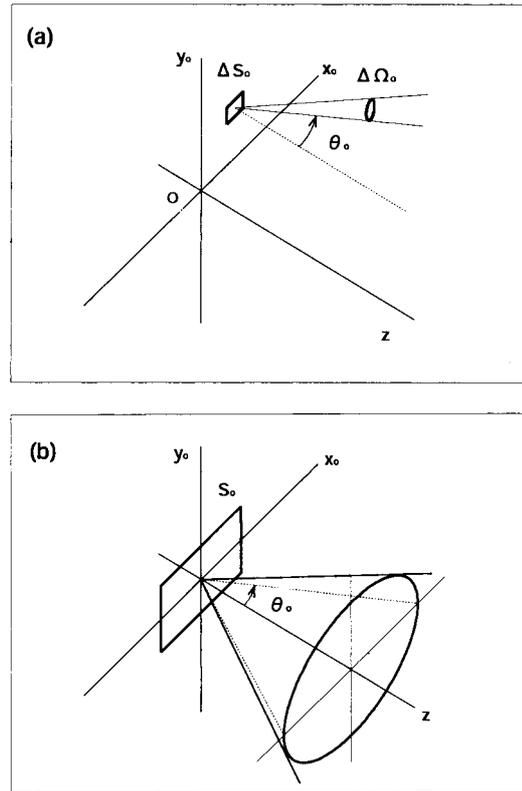


Fig. 14: Brightness B_o is the amount of energy which emerges from ΔS_o and falls within the solid angle $\Delta \Omega_o$ around a direction specified by θ_o . (b) A beam with finite divergent angle θ_o emitted from finite area S_o .

物面において光源から放射されるフラックスは、前節の(13)に対応する表式として、次のように与えられます。

$$\Delta F_o = B_o \Delta S_o \Delta \Omega_o \cos \theta_o \quad (21)$$

ここで、ビームの進行方向が z 軸となす角を θ_o としています。この様子を Fig.14(a) に示します。

(21)における B_o が、**輝度 (brightness)**を表します。たいていの光学の文献において、(21)が輝度を定義する式として登場します。なお正式には、 B_o は放射輝度 (photometric brightness) とよぶべき量です。単に輝度というと、視覚効果を考慮して定義される

別の量を指す場合があります。

一般に、輝度 B は単位時間、単位面積、単位立体角あたりのエネルギーを意味し、したがって B の単位は $W/(m^2 \cdot sr)$ です。黒体にたいしては、(13) の b_o が定数であったのに対応して、(21) の B_o もやはり定数であり、温度だけで決まります。

黒体ではない一般の光源であれば、輝度は細く絞られたビームごとに定義される量です。これも前節の b に関する議論と同様です。

なお、§8.4.2 で説明したランバートの余弦則は、本来は(21)の最後にある因子 $\cos \theta_o$ を指すものです。この因子の起源は(10)における場合と同様です。すなわち、ビームを $x_o y_o$ 平面で切ったときの断面積 ΔS_o と、ビームの進行方向に直行する面で切った断面積の比率です。

あるいは、 $\cos \theta_o$ の因子の意味は、次のように考えるほうがわかりやすいかも知れません。光源面における真の面積が ΔS_o であるのにたいして、 $\Delta S_o \cos \theta_o$ を、 θ_o 方向からながめた見かけの面積と考えます。

すると、輝度とは単位立体角、そして見かけの単位面積あたりのフラックスということになります。それが光源面の位置、およびながめる方向によらず一定であるようなものが、ランバート則をみたす光源です。そのような光源は、ながめる方向を変えても同じ明るさに見えます。

さて、前節では(13)を積分することで(16)になったわけですが、これに対応する操作を(21)にたいして行うことができます。黒体を仮定して B_o を定数とすれば、Fig.14(b)のようなビームに含まれるフラックスとして、

$$F_o = \pi B_o S_o \sin^2 \theta_o \quad (22)$$

が得られます。これを導くには、立体角の積分要素 $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ をもちい、 θ に関して0から θ_o まで積分します。

とくに、上式で $\theta_o = \pi/2$ とおけば、 S_o という面積から放出される全フラックスが与えられます。すなわち、

$$F_o = \pi B_o S_o \quad (23)$$

です。

一般に、光源の単位面積から全方向に放出されるフラックスは、照度 (illumination) とよばれ、ふつう E と書きます。上式を面積 S_o で割ることで、黒体の照度として、

$$E_o = \pi B_o \quad (24)$$

が得られます。照度は輝度を立体角で積分したものであり、よって E の単位は W/m^2 です。

(24) に関して注意すべき点は、 B_o に半球の張る立体角 2π をかけたものが E_o になるのではないということです。(21)における $\cos \theta_o$ の因子をかけて積分することで、立体角全体で積分した結果はその半分になります。

ここで、物質が光で照らされているときに、その温度がどのように決まるかを述べておきます。黒体の場合の温度と放射量の関係は、次のシュテファン-ボルツマンの法則 (Stefan-Boltzmann's law) で与えられます。

$$E = \sigma T^4 \quad (25)$$

ここで E は黒体表面の照度です。 σ はシュテファン-ボルツマン定数とよばれるもので、 $\sigma = 5.7 \times 10^{-8} [W/(m^2 \cdot K^4)]$ です。

温度 T の黒体は、そのまま放っておけば、光を放射して次第に冷えていくわけです。もし温度 T を保ちたいければ、上式の放射量と同量のエネルギーが外部から供給されなければなりません。もし上式より大きなエネルギーが供給されれば、その照射領域での温度はさらに上昇することになります。

(25) は、温度を決めるものは照度 E であり、輝度 B ではないことを示しています。ビームの輝度は、光が発せられた物体の温度 T の情報を荷っており、これが放射温度計とよばれるものの原理となります。しかし、そのビームに触れたものの温度が T になるわけではありません。もしそうだとすれば、太陽光に照らされたものはすべて太陽と同じ温度になってしまいます。

さて、 $x \sin \alpha$ 面上の面積保存則から $b_o = b_i$ が結論されたように、輝度にたいしても $B_o = B_i$ が成立します。これが輝度不変則に他なりません。

これを示す過程は前節とほとんど同様です。ここでは、最初から物面と像面で屈折率の異なる場合を示します。まず(17)に対応して、

$$n_o^2 \Delta S_o \Delta \Omega_o \cos \theta_o = n_i^2 \Delta S_i \Delta \Omega_i \cos \theta_i \quad (26)$$

が得られます。またフラックス保存の式(15)は、次式となります。

$$B_o \Delta S_o \Delta \Omega_o \cos \theta_o = B_i \Delta S_i \Delta \Omega_i \cos \theta_i \quad (27)$$

よって(26)と(27)から、

$$B_i = \left(\frac{n_i}{n_o}\right)^2 B_o \quad (28)$$

導かれます。すなわち、屈折率の等しい空間で比較すればビームの輝度は保存され、もし屈折率が増加すれば、その比率の2乗で輝度が増加するわけです。

8.5.3 輝度の測定

光源面の輝度を測定する装置を考えてみましょう。

輝度とは、単位面積、単位立体角あたりの光強度です。そこで、たとえば光源からの光をレンズで結像させて、その像の強度を測定すれば、その値から光源面の輝度が計算できるでしょう。光源面から光が取り込まれる面積と立体角は、光学的な結像関係からわかるので、その関係をもちいて換算するわけです。

ところが、そのような換算は必ずしも必要ありません。光源が黒体であれば、輝度は定数です。そして、光源面と測定面の屈折率が等しければ、測定面での輝度は光源と同じ値です。したがって、光源における面積とか立体角をまったく気にせず、ただ測定面の輝度を測ればそれでよいのです。

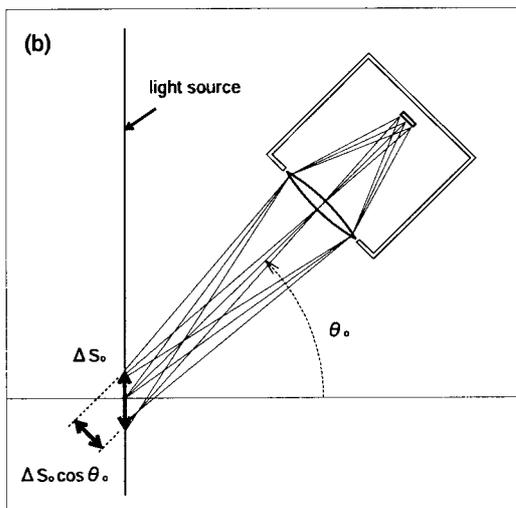
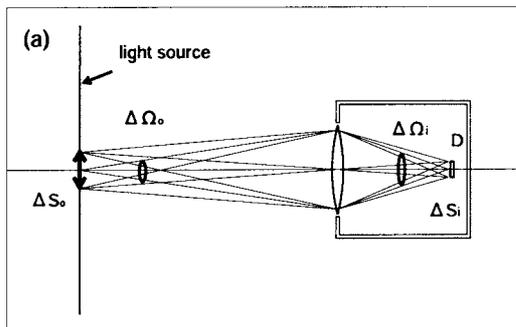


Fig. 15: An optical system for measuring the brightness of a plane light source.

測定の際に、光源面において光が取り込まれる場所と取り込み立体角を、以下では「サンプリング条件」とよびます。黒体では、この条件とは無関係に、同一の輝度が測定されます。

一般の光源では、輝度はサンプリング条件によって値が違ってくるでしょう。しかし、光源は近似的に黒体、あるいは完全拡散面と見なせることが多いので、ふつう輝度は光源ごとに決まる定数と考えてかまいません。

具体的に、Fig.15(a)のような測定系を考えてみましょう。レンズの像面におかれた検出器 D は、面積 ΔS_i をもち、この面に単位時間あたりにやってくるエネルギー ΔF_i を測定するものとします。

この系において、検出器 D 上の一点からレンズを見たときの立体角を $\Delta \Omega_i$ とします。もし光線がどこかに置いたアパーチャーで制限されているのであれば、アパーチャーの視角に対応する立体角とします。 D 面における輝度 B_i とフラックスの関係は、

$$\Delta F_i = B_i \Delta S_i \Delta \Omega_i \cos \theta_i \quad (29)$$

で与えられます。今は光源を正面から見ているので $\cos \theta_i = 1$ です。よって上式から、

$$B_i = \frac{\Delta F_i}{\Delta S_i \Delta \Omega_i} \quad (30)$$

が得られます。

上式によって、 D 面での輝度 B_i がわかります。そしてこれが、光源面においてサンプリングされたビームがもつ輝度であるわけです。

光源面でのサンプリング条件、すなわち、 D 面の面積 ΔS_i を光源面に換算したときの面積 ΔS_o と光源面での取り込み立体角 $\Delta \Omega_o$ は、レンズの結像関係から簡単にわかります。すなわち、レンズの倍率を M とすれば、

$$\Delta S_o = \frac{\Delta S_i}{M^2}, \quad \Delta \Omega_o = M^2 \Delta \Omega_i \quad (31)$$

です。ただし、 ΔS_o や $\Delta \Omega_o$ などは微量量なので、ガウス光学の関係をもちいています。

ここで、光源から測定器までの距離を2倍に伸ばしたらどうなるかを考えてみましょう。ただしレンズの焦点距離を調整して、 D 面での結像条件を保つとします。この場合、 M が $1/2$ になるので、上式によって ΔS_o は4倍になりますが、同時に $\Delta \Omega_o$ は $1/4$ になります。距離の変化によって、このようにサンプリング条件が変わります。しかし完全拡散面であれば、

これらの効果が相殺されるので、結局、測定される輝度は不変です。

もし、レンズのピントがずれていて、 D 面の光源像がボケていたなら、やはりサンプリング条件が変化します。この場合は、像がボケる分、ピントが合っているときよりも広い範囲からの光が取り込まれるでしょう。測定される D 面の輝度は、そのようなサンプリング条件にたいしての、光源面の平均的な輝度を与えることとなります。広い範囲での平均的な輝度を知りたいければ、ピントが合っていないほうがよいわけです。

また、もし Fig.15(a)において、光源サイズが ΔS_0 より小さいと、 D 面に入るべき光の一部が欠けてしまいます。すなわち、測定系のサンプリング条件のすべてを光源からの光がみだせない場合です。そのようなことがあると、当然ながら、測定される輝度は本当の光源のもつ値よりも小さい値になります。

Fig.15(a)のような状況は、ちょうど人間が光源をながめる場合と同じです。入射光の立体角は瞳によって小さく制限されるので、人間が感じる光源の「明るさ」とは、輝度そのものです。

あるいはカメラにたとえるなら、必要な露光時間は、フィルム面上において撮りたい物体が写っている場所の輝度で決まり、そしてそれは光源そのものの輝度と同じです。たとえば月の写真を撮る場合、レンズをズームさせて倍率を変えても、露光時間は同じでよいわけです。フィルム面において月の像が占める面積は変わりますが、輝度自体は保たれます。

次に、Fig.15(b)のように、面法線にたいして装置を回転させるとどうなるでしょうか。この場合は、光源面が光軸に垂直ではなくなるので、厳密には光源のすべての点でピントが合うということはありません。しかしこれも、Fig.15(a)でピントがボケた場合と同じで、サンプリング条件が若干変更されるだけです。

測定される結果はどうなるかといえば、光源が完全拡散面であれば、検出器に入る光強度は角度に依存しません。なぜなら、この光源によってつくられる場は完全に等方的であり、決まった方向性を持たないからです。

この場合、ランバート則にしたがって、検出器で測定される強度が $\cos \theta$ で減少すると考えてはなりません。ランバート則が適用されるのは、光源面において固定した面積からの光を考えた場合だけです。

今の場合、レンズにとっての見かけの面積 $\Delta S_0 \cos \theta$ が Fig.15(a)における ΔS_0 に対応します。斜めから

ながめることで、光源面においてサンプリング条件となる ΔS_0 は、回転前より増加しています。そこで、もし取り込み面積を固定すれば $\cos \theta$ で減少するはずの光量が、ここでは一定に保たれるのです。

もちろん、このような面倒な議論をする以前に、測定される輝度は角度によらないことが理解されなければなりません。

8.6 輝度不変則とアッペの正弦条件

8.6.1 太陽光の集中

まえがきで太陽光を集中させるはなしをしましたが、ここでやっと定量的な議論ができます。虫メガネで太陽光を集める様子を示したのが Fig.16(a)です。

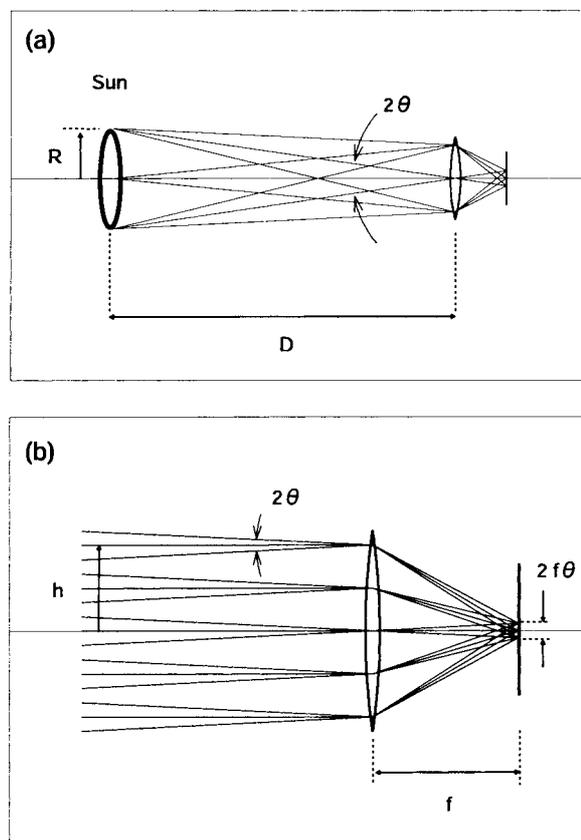


Fig. 16: (a) Concentration of solar radiation using a magnifying glass. (b) A ray diagram when the sun is assumed to be located at infinity.

この図の状況のまま議論をしてもよいのですが、太陽は十分遠い位置にあるので、無限遠点の物体として扱うほうが楽です。通常の光源であれば、無限に遠ざけると点光源に見えてしましますが、太陽はサイズが大きいのので、地球から見た視角が有限の値と

なります。

概数でいえば、地球から太陽までの距離は $D = 1.5 \times 10^{11} \text{m}$ 、太陽の半径は $R = 7.0 \times 10^8 \text{m}$ です。これらから半視角 $\theta = R/D$ を求めると、 $\theta = 0.3^\circ = 5 \text{ mrad}$ となります。Fig.16(a) では θ が大きめに描かれていますが、実際はこの程度の小さな値です。

そこで、レンズに入射する太陽光を、微小な角度幅 $\pm\theta$ をともなった、ほとんど平行なビームとして扱うことが可能です。この状況が Fig.16(b) に示されています。この極限的な扱いにおいては、太陽表面上の一点から出た光線は、レンズ入射面において光軸と決まった角度をなす平行な光線群となります。

この状況において、もし近軸理論、すなわちガウス光学におけるレンズ公式をそのまま適用するならば、レンズの焦点面における太陽光の集中度をいくらでも高めることが可能です。

すなわち、同じ焦点距離 f の値にたいしてレンズ口径 $2h$ を大きくしていけば、あるいは、口径を固定して焦点距離を短くしていけば、集中度はいくらでも高まります。したがって、ガウス光学のもとでは、明確な集中度の上限というものが導かれません。

ここで、少し太陽光の話をはなれて、ガウス光学の要点を思い出しておきましょう。ここでの議論のためには、電子光学の言葉もちいるほうが適しています。要約すれば次のようになります。

電子軌道が光軸からあまり離れなければ、座標 x と傾き x' はともに微小量と見なされます。軌道方程式をこれらの変数についてべき展開して、1次の項のみを残せば、1次軌道方程式が導かれます。この方程式をもとにしたものが1次近似の光学、すなわちガウス光学です。

1次軌道方程式の解は重ね合わせが効きます。 $x = x(z)$ という解があれば、 a を任意定数として $x = ax(z)$ も解です。また二つの解 $x = x_1(z)$ 、 $x = x_2(z)$ があれば、 $x = x_1(z) + x_2(z)$ も解です。このことから、物面の一点から出た軌道はすべて像面の一点に集まり、収差がないことが導かれます。

さて、1次方程式の解を定数倍しても解であるのは確かですが、その定数をどんどん大きくしていけば、光軸にたいしての距離と角度は増加していった、近軸という範囲をこえてしまいます。「そのような軌道は現実には意味がない、なぜなら収差が発生するからだ」というのが常識的な見解でしょう。

ところが、収差はいつでも現れるわけではありません。電子光学系はともかく、光学系においては、収差は必要な程度までいくらでも補正できます。そして

ガウス光学は、形式上はいくらでも軸外領域に拡張してもちいることが可能です。では、もし光学系の収差が取り払われたら、その系は軸外でもガウス光学に従うようになるのでしょうか？

これを考える手がかりが、太陽光の集中の問題から与えられます。先に述べたように、ガウス光学からは、集中度に関してのなんらかの限界というものは導かれませんが、したがって、軸外領域における光線が、ガウス光学が与えるものと一致することはありえないのです。たとえ収差が除かれた光学系であっても、それはガウス光学が通用することを意味するのではないということです。

以上のことから、軸外で収差なしの結像が行われ、かつガウス光学とは異なるような別種の光学が存在するはずですが、Fig.16(b)における光線図は、そのような光学によって描き直されなければなりません。修正された光線図は、それによって光の集中度の限界が正しく説明されるようなものです。

この新しい光学は、以下のように、輝度不変則にもとづいて構築されます。いきなり光線図を考えるのは難しいので、まず太陽表面とレンズの焦点面における輝度の関係を考えて、それから何が導かれるかを見てみましょう。

Fig.16(b)の状況において、輝度不変則を適用してみます。このために、太陽表面から議論をはじめめる必要はありません。輝度は不変ですから、レンズの入射面での輝度は、太陽表面の輝度と同じです。そして、レンズの焦点面における輝度もそれと同一の値です。

Fig.17は、レンズ入射面と焦点面におけるエミッタンス図を $x \sin \alpha$ 面上で描いたものです。光線図はまだ描けないので、レンズ部分はブラックボックスとしておきます。

まず、近軸領域ではガウス光学が適用できます。焦点距離は近軸光線にたいして定義される量であり、それを f とします。ガウス光学にしたがえば、焦点面において、レンズ入射面における角度幅 θ に比例した、 $2f\theta$ の大きさの像が形成されます。これは Fig.16(b)の状況そのままです。

このようにして焦点面につくられる像は、太陽の縮小像です。今の場合には物面が無限遠点にあるので、焦点面が像面となります。この太陽像の大きさを決めているのは θ であって、入射高 h ではないことに注意しましょう。

この状況において、レンズ入射面と像面におけるエミッタンス図を考えてみます。Fig.17に示されているように、入射面におけるエミッタンス図を小さな

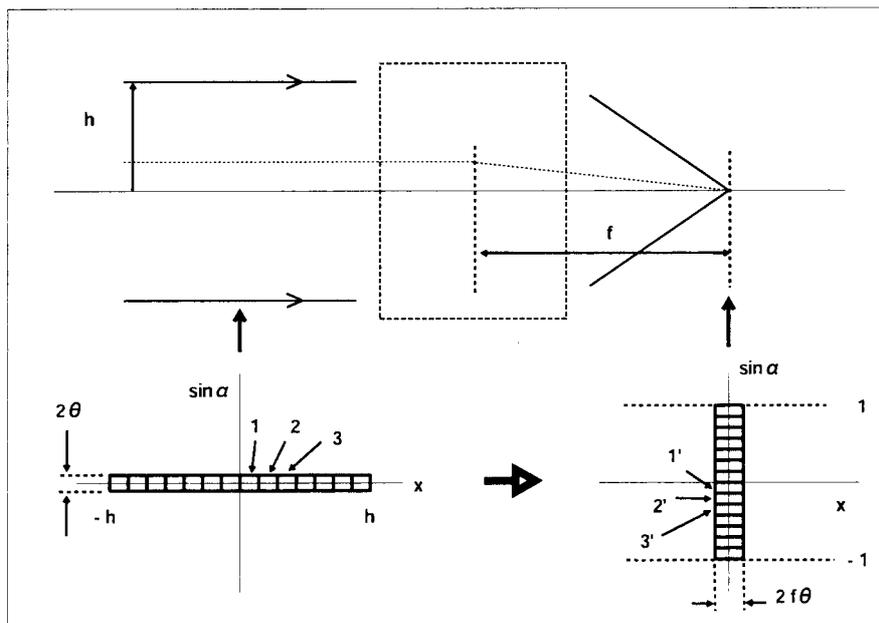


Fig. 17: Emittance diagrams at the entrance of the lens and the focal plane. Theoretical maximum concentration of radiation is achieved when the emittance diagram fills the range from $\sin \alpha = -1$ to 1 at the focal plane.

ブロックに分けておきます。ここで $x \sin \alpha$ 面上の面積保存則を考慮すれば、まず小さな h に対応するブロックが像面に移されて、像の大きさが確定します。 h が小さいことは近軸を意味しますから、これはガウス光学における結像です。(入射高の最大値、すなわちレンズ口径を表す h と、変数としての入射高 h を本来は区別すべきですが、ここでは同じ記号をもちいます。)

問題は、入射高 h を大きくしていったときです。収差はないと仮定しましょう。このとき、面積保存則がみたされるためには、レンズ入射面におけるエミッタンス図のブロックが、像面において上下方向にまっすぐに積み重ねられていく必要があります。

もし収差があっても、面積が保存されることには変わりありません。収差があるということは、ブロックがまっすぐ積み上げられるのではなく、形状がゆがんで x 方向にはみだすということです。 x 方向にはみだすということは、すなわち像がボケるということです。

収差がないという状況のもとでは、 h を大きくしていったときに、像面におけるエミッタンス図はいくらでも上下に伸びていくことはできません。ブロックの面積は保存され、そして縦軸は ± 1 が限界であるからです。したがって、 α が $\pm \pi/2$ に達したらそれで終わりであり、その状態が太陽像の強度の上限です。

$\sin \alpha$ が ± 1 に達した状況において、太陽像の場所

での照度 E [W/m^2] を考えてみましょう。像面での輝度は太陽表面と同じですから、計算するまでもありません。すなわち、 $|\sin \alpha| \leq 1$ の範囲をすべて埋めていけば、その領域においては太陽表面と同じ照度になっています。照度と温度が対応するのでしたから、太陽像の場所での温度は局所的に太陽表面と同じになるわけです。

結局、太陽より高い温度がつかれないという事実は、 $x \sin \alpha$ 面上での面積保存則からの直接の帰結であるわけです。

なお本節では、屈折率はレンズ内部をのぞけば全空間で共通と考え、 $x \sin \alpha$ 面上での面積保存則をもちいてきました。もし像面での屈折率が太陽表面よりも大きければ、輝度は増加し、よって太陽より高い温度を得られそうに思えます。たとえばレンズから像面までを適当な屈折率の油で浸すなどすれば、この状況がつけられます。

この方法によって、像面における輝度が増え、よってビームの集中度が高まるのは確かです。しかし一方で、物体からの熱放射は屈折率に比例して増加することが示されています。つまり、エネルギーを失う率も増えてしまうのです。熱平衡に達したときの温度は不変であり、熱力学の法則に反した結果が得られるわけではありません。

8.6.2 アッペの正弦条件

前節では、 $x \sin \alpha$ 面上での面積保存則によって、光の集中度の限界が説明されることを見ました。しかし、そのような限界を有する光学がガウス光学と比べて何が違うのかは、まだはっきりしていません。

たとえば、 $\sin \alpha$ が ± 1 に達したところで集中の限界になることはわかりましたが、その限界に近づくときの光線図はどのようなものなのでしょうか。

前節でもちいた Fig.17 を見ましょう。像面において角度が $\pm \alpha$ までみたされた状態を考えれば、レンズ入射面でのエミッタンス図の面積が $4h\theta$ 、焦点面での面積が $4f\theta \sin \alpha$ ですから、これらを等しくおけば、

$$h = f \sin \alpha \quad (32)$$

という関係が得られます。

上式を、 α を大きくしていったときの h の変化を与える式と見ることができます。すなわち実際とは逆向きに、焦点面から図の左方向に光線が出てと考えて、レンズを抜けたあとの光線の高さが上式で与えられると考えます。(32) の関係を図示すれば、Fig.18 のようになります。

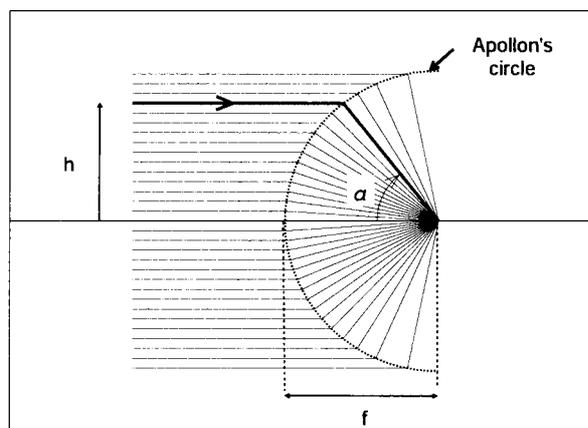


Fig. 18: A ray diagram when Abbe's sine condition is satisfied.

図からわかるように、 α の増加とともに h は頭打ちとなり、 $\alpha = \pm \pi/2$ で最大値 $h_{max} = f$ に達します。ガウス光学では、 f を固定して h を大きくしていけばいくらかでも集中度が増すという状況でしたが、(32) という条件をみたしながら h を際限なく大きくすることは不可能であるわけです。

Fig.18 における円は、アポロンの円 (Apollon's circle) とよばれています。注意すべきは、実際の屈折面は、このアポロンの円とは無関係であるということ

です。焦点面から逆に描いたときの光線の延長線と、左から入射してくる光線の延長線の交点を結んだときに、このような円になるべきということです。すなわち Fig.18 において、光学系自体はあくまでブラックボックスです。実際に (32) という条件をみたすレンズをつくろうとすれば、非球面を含めた多くの屈折面を組み合わせる必要があります。

さて、難しいのは、(32) が光学的に何を意味するのかということです。(32) は面積保存則、すなわち輝度不変則をみたすための条件であると思えるかも知れませんが、そうではありません。

Fig.17 においては、輝度不変則をみたすという要求のほかに、太陽の像が収差なしで結像されることまで含んでいます。したがって、輝度不変則の条件だけなら、必ずしも (32) にしたがう必要はありません。

逆に、現実に存在するレンズを考えれば、それは収差のあるなしとは無関係に、必ず輝度不変則をみたすわけでは、(32) をみたすレンズはどのような意味で特別なのでしょうか？このように考えれば、(32) は収差が消える条件であることに気がつくでしょう。

(32) をみたすレンズがあったとします。Fig.18 の状況において、焦点面にやってくる光線を $x \sin \alpha$ 面上でプロットすれば、レンズへの光線の入射高 h の増加とともに、縦軸上に等間隔に点が打たれていきます。

ここで入射ビームが角度幅をもつ場合を考え、面積保存則を適用します。入射面でのエミッタンス図のブロックを、焦点面でのエミッタンス図として積んでいけば、縦方向にまっすぐに並ぶしかありません。なぜなら、面積保存の要求がある以上、縦軸上の等間隔の点を通るためには、横方向にはみだそうとしてもできないのです。

正確に言えば、 $x \sin \alpha$ 面の縦軸上で等間隔に点が打たれていても、縦軸から大きく離れれば縦方向に波打つ可能性が出てきます。次数をはっきりいうなら、(32) は、 x に関して 1 次で増加するような収差が消える条件です。すなわち、コマ収差がなくなる条件ということです。

まとめれば、(32) をみたすレンズはコマ収差がないということになります。この、コマ収差が消える条件としての (32) を、アッペの正弦条件 (Abbe's sine condition)、ふつうは単に正弦条件といいます。

§ 8.5.1 で導いた光学的正弦条件 (19) は、 $nx \sin \alpha$ 面上の面積保存則を、物面と像面との間に適用して得られたものです。(32) も同じ面積保存則からの帰結ですが、レンズの入射面と像面の間で適用したと

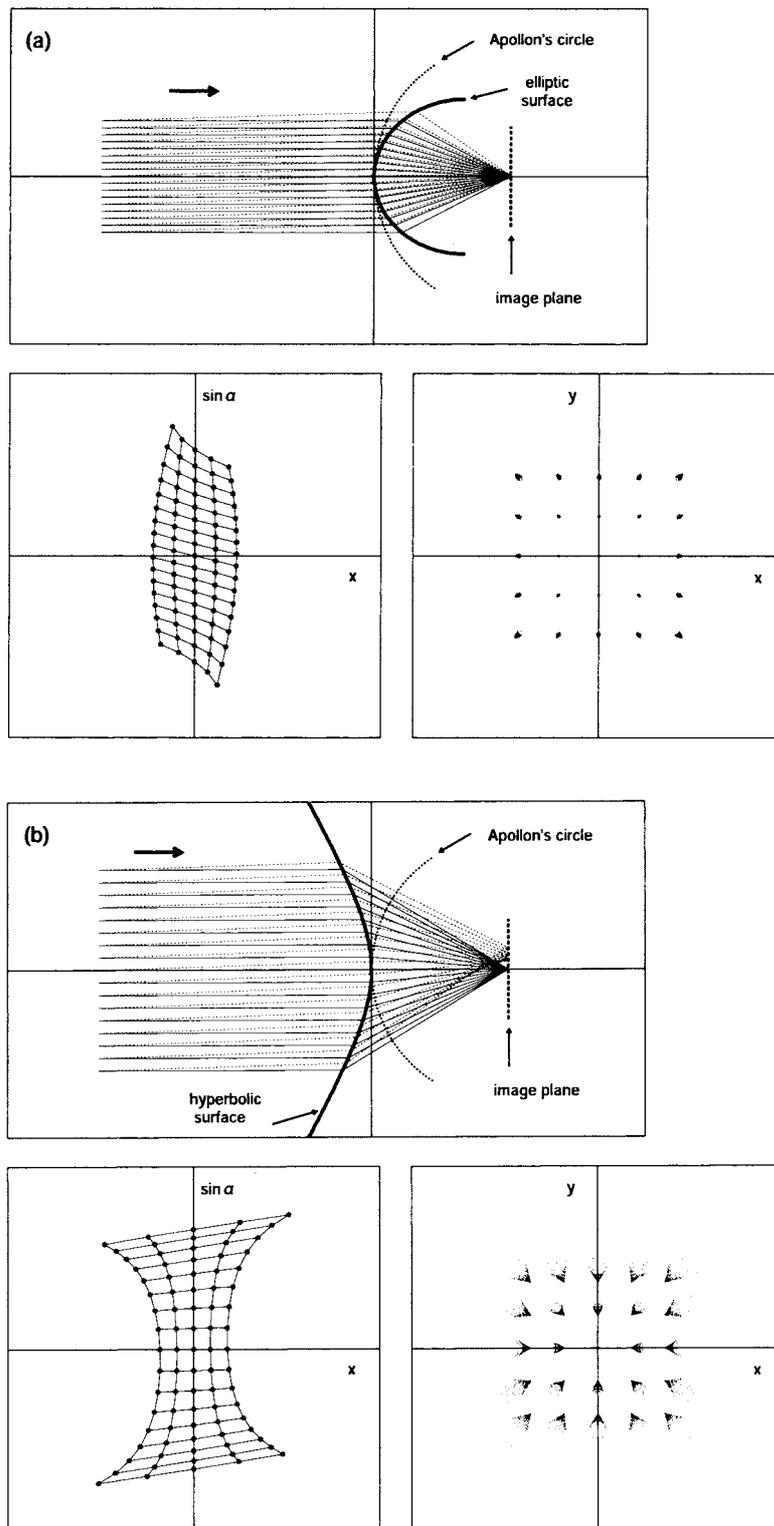


Fig. 19: Refractive surfaces without spherical aberration: (a) an elliptic surface, (b) a hyperbolic surface. These surfaces do not satisfy the sine condition, and thus have coma in some degree.

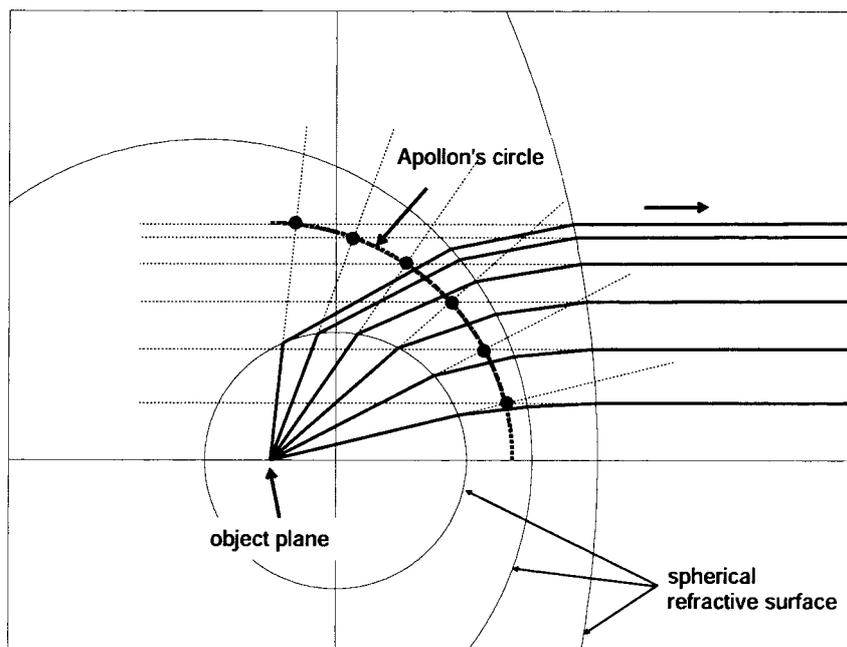


Fig. 20: Refraction of rays by successive spherical interfaces. Apollon's circle is formed, which means the disappearance of coma.

きの関係であり、さらにこれらの二面における屈折率が等しいことが仮定されています。

コマ収差は軸外物点にたいしての収差であるのに、(32)は平行に入射する光線、すなわち軸上の無限遠点からの光しか関与していないことに注意しましょう。軸上物点の結像と、軸外収差が結びつけられたわけです！これは、ビームとしての光線のふるまいを規定する輝度不変則の威力です。

歴史をいえば、アッペが光学顕微鏡の設計に苦心していた際に、軸上でこの条件をみたすレンズはコマ収差がないことを経験的に発見したのです。これは1873年のことです。当時はレイトレーズを手計算でやっていたので、(32)の評価だけでコマ収差が考慮できることは大きなメリットであったでしょう。

現代においても、カメラレンズなどの性能を示すために、正弦条件がどの程度みたされているかがカタログデータなどに載せられます。これは(32)からのずれを h の値ごとにプロットしたもので、この曲線は**正弦条件違反 OSC**(offence against sine condition)とよべます。OSCというよびかたは世界共通です。コマ収差係数を示すだけでは3次の収差量しかわかりませんが、OSCによれば全次数の収差係数、すなわち任意の開き角にたいしてのコマ収差量が知れます。

また、レンズの明るさを示すための量として、 $f/(2h)$ の値が**F ナンバー**として示されます。Fig.18

からわかるように、正弦条件をみたしながら $\alpha \rightarrow \pi/2$ としたときのFナンバーは0.5です。これが、コマ収差を補正されたレンズとしての極限の明るさとなります。

ここで、正弦条件をみたさないレンズというものを考えてみます。平行に入射した光線は1点に集まるものの、その集まり方がFig.18のようなにはならないような場合です。つまり、球面収差はないがコマ収差が存在するという状況です。(球面収差が存在するときに正弦条件をどのように扱うべきかは、非常に難しい問題であり、ここでは議論しません。)

実例を考えましょう。球面収差のないレンズでなければなりませんから、屈折面が一つの場合を考えれば候補は限られます。有限な距離にある物点にたいして球面収差をもたない屈折面は、デカルトの卵形とよべます。これはすでに第1章と第5章で示しましたが、平行入射の場合にはこれは楕円面に移行します。

楕円面のときは、物体より像側の屈折率の方が大きくなければなりません、逆の場合も可能です。すなわち、物体側の方が屈折率が高いという前提のもとでは、双曲面を採用すればやはり球面収差がなくなります。これらの屈折面による結像の様子をFig.19(a)(b)に示します。

図では、アポロンの円も一緒に示しています。楕円面の場合、屈折面とアポロンの円の形状に近いの

で、正弦条件が近似的にみたされ、軸外でそれほど像はボケません。逆に、双曲面ではアポロンの円と反対側に反った形状となるので、かなり急激に軸外収差が現れます。

予備知識なしでこれらの二つの屈折面の優劣を聞かれたら、入射高を大きく取れるという意味で、双曲面のほうが有利に思えるはずで、とくに、光を多く集めるという目的であれば、 h を大きく取れることは有利であるはずで、ところが、大きなコマ収差の存在によって、収差なしに結像されるのは軸上だけであり、有限の大きさの像の中に光線を集中させる目的のためには必ずしも適しません。

最後に、正弦条件をみたす例を示しておきましょう。すでに第5章で紹介した、Fig.20の系です。これは、球面の屈折面を並べて置いて、点光源にたいして球面収差のない虚像を次々につくりながら、しだいに平行ビームに近づけていくものです。各屈折面は、対称性によってコマ収差をもたず、したがってその作用を合成した全体の系でもコマ収差がありません。

点光源からの光線の出射条件を延長し、系を出る光線を逆向きに延長した直線との交点をとれば、図に示したようにアポロンの円が描かれます。すなわち、正弦条件をみたしていることがわかります。

この光学系の原理は電子光学にでも応用されて、メッシュをもちいた球面収差のない静電レンズが実現されます。(これも第5章で設計例を示しました。) この系では厳密に正弦条件をみたすわけではありませんが、原理が同じである以上、コマ収差は十分小さく抑えられます。

球面収差だけでレンズを評価できないのは、光学でも電子光学でも同じです。結像の対象が点光源と見なしうる場合でも、実際には必ず有限のサイズをもちます。また、少しでも軸からずれたら収差が発生するというのでは、実用のレンズとしては不適です。球面収差とコマ収差は、どちらも十分に補正されなければなりません。

8.7 輝度不変則の本質について

ここままで見てきたように、輝度不変則は $x \sin \alpha$ 平面上の面積保存則からの帰結であり、そしてその面積保存則は、スネルの法則から導かれるものです。

たまたまスネルの法則が、そのような理論を生み出す性質のものであったと考えることもできるでしょう。しかし、一般の力学系においても類似の法則が存

在し、それがやはり力学系のふるまいを本質的に規制しているという事実があります。

力学系において、輝度不変則に対応する法則はリュービルの定理とよばれます。リュービルの定理はすべての力学系で成り立つものであり、具体的な相互作用から離れた一般的な議論から導かれます。

簡単な例として、1次元の調和振動子を考えます。その運動方程式は、 $m\ddot{x} = -m\omega^2 x$ の形になります。この系に対して正準運動量 $p = m\dot{x}$ が定義され、 x と p をもちいて表した系のエネルギーがハミルトニアンとよばれます。これは次式のようにになります。

$$H(x, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (33)$$

右辺の第1項が運動エネルギー、第2項が位置エネルギーです。

ハミルトニアンが与えられれば、系の運動方程式は次式の形で与えられます。

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H(x, p)}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H(x, p)}{\partial x} \end{cases} \quad (34)$$

これがハミルトンの正準方程式とよばれるものです。一般の系でも、ハミルトニアンが与えられれば、上式に対応した形で運動方程式が与えられます。

(34)は、 xp 平面におけるベクトル場を表していると見ることができます。すなわち、系が現在 (x, p) という状態にあるとき、その点における速度ベクトル $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{p})$ を与えるのが (34)の右辺です。

この系を xp 平面上でながめれば、(34)の速度ベクトル場で流れていく流体のように見ることができます。もし xp 平面上に適当な図形を考えれば、時間の経過とともにそのベクトル場に押し流されて、形を変えていくでしょう。

この流れに沿っての、図形の面積の変化に注目してみます。ある流れによる面積の変化は、そのベクトル場の発散で与えられます。(34)にたいして発散を計算してみれば、

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_p}{\partial p} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

となます。すなわち発散はいたるところ0であり、流体力学のことばでいえば、非圧縮性流体としてふるまうこととなります。この結果として、 xp 面上の面積は不変に保たれます。

§8.3.1においては、ドリフト空間の作用を表すベクトル場が現れましたが、これは上の速度ベクトル場に対応するものです。ただし、光学における正準運動量は $x' = \tan \alpha$ ではなく $p = n \sin \alpha$ であり、正確にはこれを変数にとらなければなりません。

一般の力学系では次元を拡張する必要がありますが、やはりハミルトニアンが生成するベクトル場の発散は0です。すなわち、速度ベクトル場の非圧縮性は、ハミルトニアンを有するすべての力学系がもつ特徴です。

さて、第7章で議論したように、ハミルトニアンによって規定される粒子は、波としてふるまいます。ハミルトニアンとは媒質の分散関係に他ならず、正準運動量は、粒子の軌道に付随した波の波数ベクトルと定数だけの違いです。結局、輝度不変則は、波が本来的にもつ性質の一つであるといえます。

ビームをエネルギーの伝播形態としてとらえるなら、輝度不変則は、空間におけるエネルギーの流れがみたすべき法則です。もしこの伝播則を逸脱すると、熱力学第二法則、すなわち、熱は温度の低いところから高いところへはひとりで移動しないという事実と抵触します。輝度不変則は、熱力学第二法則の一つの表現と見なすことができるでしょう。

§8.1での議論にもどれば、輝度不変則は、熱力学と矛盾することがないように光学に付け足されたものではありません。光は波である、ということからの直接の帰結であるわけです。

8.8 まとめ

本章では、光学における輝度不変則を導き、その意味するところを考察しました。要約すると次のとおりです。

(1) ドリフト空間においては、 xx' 面上のエミッタンスが保存される。これは、個々の光線ではなく、その集団としてのビームのふるまいに関する法則である。

(2) 光源とレンズを組み合わせてつくられるビームは、光源の大きさに対応した角度幅 $\Delta\alpha$ をもつ。このようなビームは、光源の各点がつくる独立な光波が空間的に折り重なったものである。

(3) ビームを $x \sin \alpha$ 面上のエミッタンス図として表現するなら、ビームの回転によって面積が不変になる。等方的な光の場合は、 $x \sin \alpha$ 面上で一定の光線数密度 b をもつ分布として表現される。

(4) スネルの法則から、 $x \sin \alpha$ 面上の面積は屈折率 n に応じて増減することが示される。一般の系においては、 $nx \sin \alpha$ 面上の面積保存則が成立する。同じ n の場所で比較するなら、 $x \sin \alpha$ 面上の面積が保存する。

(5) 温度の定まった黒体からの光は完全に等方的であり、したがって $x \sin \alpha$ 面上の様な光線数密度分布で表現される。面光源からのこのような放射場は、ランバートの余弦則をみたとす。

(6) 結像系において $nx \sin \alpha$ 面上の面積保存則を適用することで、光学的正弦条件が導かれる。また、光線数密度 b が屈折率に比例することが導かれる。

(7) 光線数密度 b を一般のビームに拡張して定義したものが輝度 B である。 $x \sin \alpha$ 面上の面積保存則が、輝度不変則に対応する。一般に輝度は、細く絞られたビームの強度を指定する量である。もし光源が完全拡散面であれば、その放射場の等方性によって、輝度は定数となる。

(8) 太陽光の集中度の上限は、 $x \sin \alpha$ 面上の面積保存則から得られる。すなわち、 $x \sin \alpha$ 面上のエミッタンス図が $\sin \alpha = \pm 1$ まで達した状態が集中の限界であり、このときに像の温度は太陽表面と一致する。

(9) アッペの正弦条件によって、軸上物点の結像のされ方とコマ収差の有無がむすびつけられる。この条件もやはり、 $x \sin \alpha$ 面上の面積保存則からの帰結である。

(10) 輝度不変則は、光と粒子の波動性の反映であり、熱力学第二法則を具現するものである。

8.9 文献紹介

光学における輝度や照度に関する解説は、次のものが標準的です。

- [1] 松居吉哉, 結像光学入門, 啓学出版 (1988)
- [2] 久保田広, 光学, 岩波書店 (1964)
- [3] 草川徹 他訳, 光学の原理 (第5版訳) I-III, 東海大学出版会 (1974); M. Born and E. Wolf, Principles of Optics, 6th ed., Pergamon (1980)

太陽光の集中に関しては、次のわかりやすい解説があります。これは、レンズではなく「じょうご」のような鏡で太陽光を集める話ですが、通常の光学系がもつ限界に関するも触れられています。

- [4] R. ウィンストン, 集光鏡で太陽表面の光強度を超える, 日経サイエンス 1991年5月号

黒体放射, あるいは黒体からはずれた灰色体の性

質に関しては、次のものがあります。

[5] ランダウ・リフシッツ, 統計物理学, 岩波 (1980)

[6] 庄司正弘, 伝熱工学, 東京大学出版社 (1995)

[7] 河合潤, 熱・物質移動の基礎, 丸善 (2005)

輝度の具体的な測定, あるいはそれを応用した放射温度計の原理に関しては次のものを見てください。

[8] 温度計測部会編, 新編・温度計測, 計測自動制御学会 (1992)

アップの正弦条件の解説としては、次のものが挙げられます。

[9] 吉田正太郎, 写真レンズの科学, 地人書館 (1979)

[10] 小倉磐夫, 現代のカメラとレンズ技術, 写真工業出版社 (1982)

[11] 吉原邦夫, 物理光学, 共立 (1966)

[9] の §3.9 では, F0.5 のレンズの設計例が載せられています。球面収差が補正されていない場合の正弦条件の考えかたに関しては, [10] に解説があります。